Transformări integrale şi funcţii complexe cu aplicaţii în tehnică

Volumul 2

Transformări integrale

Valeriu PREPELIŢĂ, Monica PÎRVAN, Antonela TOMA
Gheorghe BARBU, Liliana POPA, Daniela ROŞU

Cartea a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, “Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învăţare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii”.

Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea “ Politehnica” din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică “ Gheorghe Asachi” din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea “ Dunărea de Jos” din Galaţi, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea “1 Decembrie 1918” din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane – POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învăţământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de învăţare.

Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţă şi eficienţă, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care învaţă discipline matematice în universităţi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea-învăţarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca raspuns materialul de faţă.

Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităţi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învăţare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă.

În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii în legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidenţierea a noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Cuprins

Prefaţă

Calculul operaţional şi transformările integrale sunt instrumente deosebit de utile în rezolvarea multor probleme de analiză matematică, ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale, funcţii speciale, probabilităţi, teoria aşteptării, termodinamică, inginerie electrică, electronică, automatică, mecanică etc. Transformarea Laplace are numeroase aplicaţii în rezolvarea unor probleme Cauchy, în fizică, ingineria electrică etc. Transformarea Fourier se foloseşte pe scară largă în probleme la limită sau în procesarea semnalelor. Transformările multidimensionale intervin în studiul sistemelor multidimensionale (2D şi nD), datorită numeroaselor aplicaţii în diferite domenii cum ar fi procesarea imaginilor, tomografia computerizată, geofizică, seismologie etc.

Transformările integrale au fost impuse de existenţa unor tipuri de probleme dificil de rezolvat în forma lor originală, dar care devin abordabile printr-o transformare. Astfel ecuaţiile diferenţiale sau integro-diferenţiale în "domeniul timp" devin simple ecuaţii algebrice în "domeniul frecvenţă" prin aplicarea transformării Laplace. Apoi transformarea inversă produce soluţia din domeniul iniţial corespunzătoare soluţiei algebrice. Prin aplicarea transformării Fourier la ecuaţia căldurii (ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea) se obţine o ecuaţie diferenţială simplă. Metodele frecvenţiale, bazate pe transformarea Laplace (în cazul continuu) şi pe transformarea $\mathcal{Z}$ (în cazul discret) au contribuit decisiv la dezvoltarea teoriei sistemelor şi controlului.

Istoria transformărilor integrale îşi are rădăcinile în secolul 18. Un precursor a fost Jean le Rond D'Alembert, care în 1747 a utilizat suprapunerea unor funcţii sinus pentru a descrie oscilaţiile corzilor de vioară.

Metoda de calcul al coeficienţilor care poartă numele lui Fourier a fost de fapt propusă de Leonhard Euler în 1777 şi a fost apoi utilizată în 1807 de Joseph, baron Fourier pentru studiul ecuaţiei căldurii. Seriile Fourier, utile pentru reprezentarea funcţiilor în intervale finite, au fost extinse de el la intervale infinite, conducând la integrala şi transformarea Fourier.

Gottfried Leibniz a introdus operatori pentru reprezentarea operaţiilor de derivare şi integrare. Aceste idei au fost continuate şi extinse de L.F.A. Arbogast, M. Servois şi de matematicienii englezi Heargrave, Boole, Bownin, Carmichael, Doukin, Graves, Murphy, Spottiswoode şi Sylvester. Astfel, R.

B. Carmichael (1855) şi George Boole (1859) au aplicat metodele operatoriale la ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii cu derivate parţiale.

Oliver Heaviside a elaborat metodele calculului operaţional necesare rezolvării unor ecuaţii diferenţiale, în special în lucrările sale asupra teoriei electricităţii (1892), electromagnetismului (1899) sau al ecuaţiilor fizicii matematice (1892-1894). El a utilizat operatorul $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ într-un mod de calcul algebric, obţinând rezultate fundamentale în tehnică şi în fizică, dar şi unele incorecte, nefiind interesat de condiţii de existenţă.

Au fost apoi mai multe încercări de a justifica metodele operaţionale formale ale lui Heaviside. La începutul secolului 20 o serie de matematicieni printre care Wagner (1916), Carson (1922) şi Doetsch (1930) au realizat conexiunea calculului operaţional cu transformarea Laplace şi au pus metodele lui Heaviside pe o bază riguroasă, combinând metodele algebrice şi cele analitice. Ei au utilizat două spaţii, cel al funcţiilor original şi cel al transformatelor.

În 1954, matematicianul francez Laurent Schwartz a introdus conceptul de distribuţie, stabilind proprietăţile de bază, operaţiile cu distribuţii, extinzând transformarea Fourier la distribuţii temperate. Matematicianul polonez Jan Mikusinski a dat în 1960 o altă definiţie a distribuţiilor (prin câturi de convoluţii), realizând o revenire radicală la metodele algebrice într-o teorie care utilizează operatori, fără restricţii de convergenţă a transformărilor integrale. Tot el a realizat o introducere elementară a transformării Fourier în teoria distribuţiilor (1966), ca şi M.J. Lighthill (1958), J. Arsac (1961) sau H.J. Bremermann şi L. Durand (1961). Laurent Schwartz a fost primul cercetător care a introdus transformarea Laplace a distribuţiilor plecând de la transformarea Fourier (1957). Alte metode de definire a transformării Laplace pentru distribuţii au fost dezvoltate de A. H. Zemanian (1965) (care a extins la distribuţii şi alte transformări), T. Ishihara (1961), Gheorghe Marinescu şi Constantin Tudor (1967).

Scopul acestei cărţi este de a-l introduce pe cititor în teoria celor mai importante transformări care sunt utilizate în cursurile de matematică, fizică, ştiinţe inginereşti şi de a-l familiariza cu metodele de rezolvare cu ajutorul acestor transformări a ecuaţiilor diferenţiale, cu derivate parţiale, integrale sau cu diferenţe.

Capitolul 1 conţine preliminarii necesare dezvoltării teoriei şi aplicaţiilor transformărilor integrale. Sunt prezentate spaţiile de funcţii integrabile care admit transformate, seriile Fourier şi implicarea lor în istoria definirii transformării Fourier. Deoarece majoritatea transformatelor sunt funcţii de una sau mai multe variabile complexe (cu semnificaţia de frecvenţă a semnalelor), un paragraf este destinat celor mai importante noţiuni şi tehnici din teoria funcţiilor complexe. Elementele de teoria distribuţiilor care încheie capitolul sunt motivate de importanţa şi extinderea utilizării transformatelor Fourier şi

Laplace ale distribuţiilor.

Transformarea Fourier este studiată în Capitolul 2. Sunt expuse principalele proprietăţi ale transformatelor funcţiilor absolut integrabile şi apoi pentru funcţiile rapid descrescătoare, inclusiv formula de inversiune. Un paragraf include aplicaţii ale transformării Fourier (Teorema de eşantionare WKS şi relaţia de incertitudine). Studiul este completat cu transformarea Fourier discretă şi transformarea Fourier a distribuţiilor temperate.

Capitolul 3 este dedicat transformării Laplace. Principalele proprietăţi (liniaritate, asemănare, întârziere, deplasare, derivarea şi integrarea originalului şi a imaginii, convoluţie) sunt expuse împreună cu exemple care ilustrează acţiunea şi aplicaţiile lor. Urmează metode de determinare a originalului şi aplicaţii ale transformării Laplace la rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, la ecuaţii integrale de tip Volterra sau în studiul circuitului RLC.

Capitolul 4 prezintă transformarea Z cu proprietăţile corespunzătoare celor ale transformării Laplace, completate cu teoremele produsului imaginilor şi ale valorilor iniţiale şi finale. Metodele specifice de determinare a originalului şi aplicaţii la ecuaţii cu diferenţe şi la sistemele comandate discrete sunt urmate de probleme rezolvate şi propuse.

Capitolul 5 are un rol complementar, prezentând succint alte transformări care nu sunt studiate în cursurile de matematici speciale, dar au aplicaţii în inginerie (procesarea semnalelor sau a imaginilor etc.). Lista lor cuprinde transformările Mellin, Hankel, Hilbert, $\mathcal{Z}$ bilaterală, Walsh, Haar, Laplace bilaterală hibridă. Pentru a facilita rezolvarea problemelor cu instrumentele calculului operaţional, în anexe sunt date transformatele Fourier, Laplace şi $\mathcal{Z}$ ale principalelor funcţii original care apar în aplicaţii.

Textul are un caracter autoconţinut realizat prin prezentarea noţiunilor preliminare în primul capitol şi prin explicarea şi demonstrarea rezultatelor expuse. Cititorul care deţine cunoştinţele de bază ale analizei matematice poate să înţeleagă şi să aplice tehnicile transformărilor integrale şi discrete, având la dispoziţie numeroase exemple, aplicaţii şi probleme rezolvate. Cartea se adresează cadrelor didactice şi studenţilor de la studiile de licenţă, masterat sau doctorat, precum şi cercetătorilor din domeniile matematicilor aplicate, automatică, electronică, inginerie electrică etc.

Autorii

La realizarea materialului a contribuit şi conf. dr. ing. Luminiţa Scripcariu, prin propunerea unor aplicaţii practice.

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Spaţii de funcţii integrabile

1.1.1 Spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil

Fie H un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Se numeşte *produs scalar* pe H o aplicaţie $< . , . >: H \times H \to \mathbb{C}$ cu proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} 1. & (x,x) \geqslant 0, \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2. & (x+y,z) = (x,z) + (y,z) \\ 3. & (\alpha x, y) = \alpha(x,y) \\ 4. & (x,y) = \overline{(y,x)}. \end{array}$$

Propoziţia 1.1.1 (inegalitatea lui Schwarz).

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|| \cdot \|y\|.$$

Pentru demonstraţie observăm că rezultatul este evident dacă $y = 0$. Pentru $y \neq 0$ scriem că

$$< x + \lambda y, x + \lambda y > \geqslant 0.$$

Alegând $\lambda = -\dfrac{< x, y >}{\|y\|^2}$ se obţine exact concluzia. Pe baza acestei inegalităţi rezultă că aplicaţia

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

este o *normă*, adică are proprietăţile:

$$\begin{array}{ll} 1. & \|x\| \geqslant 0, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2. & \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \\ 3. & \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \end{array}$$

Tot pe baza inegalităţii lui Schwarz deducem că, pentru $x \neq 0$ şi $y \neq 0$ are loc $\frac{|<x,y>|}{\|x\|\|y\|} \in [-1,1]$. Această observaţie permite definirea unghiului a doi vetori nenuli din H ca unicul $\alpha \in [0,\pi]$ pentru care:

$$\cos\alpha = \frac{|<x,y>|}{\|x\|\|y\|}$$

În particular, vom spune că vectorii nenuli x, y sunt ortogonali dacă $<x,y>= 0$. Existenţa normei permite introducerea următoarelor noţiuni:

Un şir $x_n \in H$ se numeşte *convergent la* $x \in H$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_\varepsilon.$$

Un şir $x_n \in H$ se numeşte *Cauchy* sau *fundamental*, dacă $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca:

$$\|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon, \ \forall n \geqslant n_\varepsilon, \forall p \in N.$$

Se arată imediat că orice şir convergent este Cauchy. Dacă reciproc, orice şir Cauchy este convergent atunci spaţiul se numeşte *complet*. Un spaţiu cu produs scalar complet se numeşte *Hilbert*.

Exemplul 1.1.1. Spaţiile $\mathbb{R}^n$ sau $\mathbb{C}^n$ sunt spaţii Hilbert faţă de produsul scalar:

$$(x,y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

Exemplul 1.1.2. Spaţiul $l_2 = \{(x_n), n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R} \ \text{ sau } \ \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ este spaţiu Hilbert faţă de produsul scalar:

$$(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_n}.$$

Definiţia este corectă , căci din inegalitatea $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$, rezultă că seria este absolut convergentă.

Prin mulţime *neglijabilă* înţelegem că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ mulţimea poate fi acoperită cu un şir intervale a căror lungime totală este $< \varepsilon$. De exemplu o mulţime cel mult numărabilă de numere reale este neglijabilă.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Vom spune că două funcţii (măsurabile) $f, g : I \to \mathbb{C}$ sunt *egale aproape peste tot* (prescurtat a. p. t.) dacă mulţimea $\{x \in I | f(x) \neq g(x)\}$ este neglijabilă. $f = g$ a. p. t. este o relaţie de echivalenţă. Se notează cu $L^p(I)$ pentru $p \in [1, +\infty)$ mulţimea claselor de funcţii măsurabile pe I, cu proprietatea:

$$\int_I |f(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty.$$

Pentru $p = 2$ se obţine spaţiul $L^2(I)$, care este spaţiu Hilbert faţă de produsul scalar. Funcţiile din $L^2(I)$ se numesc *funcţii de pătrat integrabil.*

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Inegalitatea Schwarz devine în acest caz:

$$\left|\int_I f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_I |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x}\sqrt{\int_I |g(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

Convergenţa în norma spaţiului $L^2(I)$ se numeşte în *medie pătratică.*

Dacă în particular H este un spaţiu de funcţii, reamintim alte tipuri de convergenţă.

Şirul f_n converge *punctual* la f, dacă $\forall x \in [a, b]$, şirul numeric $f_n(x)$ converge la $f(x)$, adică:

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon,x}, \text{ astfel încît } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Şirul f_n converge *uniform* la f, dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \text{ astfel încît } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

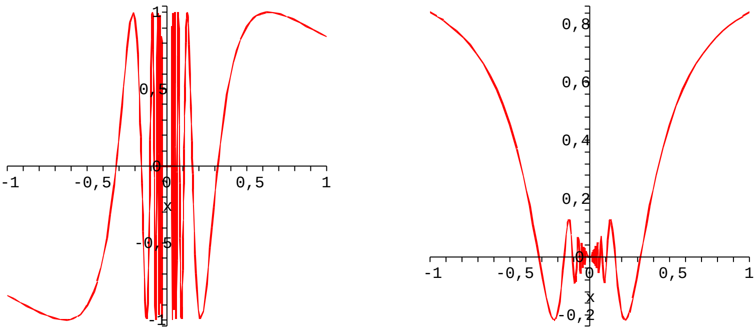
Să observăm că dacă un şir converge uniform, atunci converge şi în medie pătratică. Din convergenţa în medie pătratică nu rezultă nici convergenţa uniformă nici cea simplă.

Este evident faptul că mulţimea tuturor funcţiilor continue pe $[a, b]$, notată $C[a, b]$, satisface $C[a, b] \subset L^2[a, b]$. Spaţiul $L^2[a, b]$ mai conţine:

- *funcţii continue pe porţiuni*, pentru care există o partiţie a intervalului $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ astfel ca
  i. f să fie continuă pe (x_k, x_{k+1})
  ii. există limitele laterale $f(x_0+0), \cdots, f(x_k-0), f(x_k+0), \cdots, f(x_n-0)$ finite.
- *funcţii monotone pe porţiuni* pentru care există o partiţie a intervalului $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ astfel ca
  i. f să fie monotonă pe (x_k, x_{k+1}).
  ii. f este mărginită.

Să vedem câteva exemple de funcţii din aceste clase. Considerăm

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\sin\frac{1}{x}$ $\qquad$ $x\sin\frac{1}{x}$

Figura 1.1:

Funcţia este continuă pe $[-\pi, \pi]$, mărginită, dar nu este monotonă pe porţiuni.

Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este monotonă pe porţiuni, dar nu este mărginită şi nu este din $L^2(I)$, dacă $0 \in I$.

O funcţie măsurabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabilă pe orice interval mărginit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se numeşte *local integrabilă.* Notăm mulţimea claselor de astfel de funcţii cu $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Evident că dacă f este integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci ea este din $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, dar există funcţii local integrabile pe $\mathbb{R}$, care nu sunt integrabile: de exemplu funcţia constantă 1 este local integrabilă dar nu este integrabilă pe $\mathbb{R}$.

1.1.2 Produs de convoluţie

Definiţia 1.1.1. *Date două funcţii măsurabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, numim* produs de convoluţie *funcţia:*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y.$$

dacă integrala există măcar pentru aproape orice x .

Evident, dacă facem schimbarea de variabilă $x - y = u$, atunci

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\ \mathrm{d}u = (g \star f)(x)$$

deci dacă există, produsul de convoluţie este comutativ. Indicăm trei situaţii uzuale în care produsul de convoluţie există şi este o funcţie local integrabilă pe $\mathbb{R}$.

- Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sunt integrabile, atunci $f \star g$ există şi este o funcţie integrabilă; într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f \star g|(x) \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} | \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) \ \mathrm{d}y| \ \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)||g(x-y)| \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \ \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} |g(y-x)| \ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \ \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \ \mathrm{d}u < \infty.$$

- Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ şi $f(x) = g(x) = 0, \ x < 0$, atunci $f \star g$ există şi $f \star g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

  Să observăm pentru început, că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-y) \ \mathrm{d}x = \int_0^x f(y)g(x-y) \ \mathrm{d}y$$

  deci $f \star g$ există şi $(f \star g)(x) = 0$ pentru $x < 0$. Pentru a arăta că este o funcţie local integrabilă, fie $A > 0$ şi să calculăm

$$|\int_0^A (f \star g)(x) \ \mathrm{d}x| \leqslant \int_0^A \int_0^t |f(y)||g(x-y)| \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^A |f(y)| \ \mathrm{d}y \int_y^A |g(x-y)| \ \mathrm{d}x = \int_0^A |f(y)| \ \mathrm{d}y \int_0^{A-y} |g(u)| \ \mathrm{d}u < +\infty,$$

  deci $f \star g$ este local integrabilă.

- Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sunt local integrabile şi una dintre funcţii are suport compact, atunci $f \star g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

  Într-adevăr, presupunem că *supp* $f \subset [-A_1, A_1]$; atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) \ \mathrm{d}y = \int_{-A_1}^{A_1} f(y)g(x-y) \ \mathrm{d}y$$

există şi deci produsul de convoluţie este bine definit; fie acum $A > 0$; să arătăm că produsul este integrabil pe $[-A, A]$.

$$|\int_{-A}^{A}\int_{-A_1}^{A_1} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y| \leqslant \int_{-A}^{A}\int_{-A_1}^{A_1} |f(y)||g(x-y)|\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-A_1}^{A_1} |f(y)|\mathrm{d}y \int_{-A}^{A} |g(x-y)|\mathrm{d}x = \int_{-A_1}^{A_1} |f(y)|dy \int_{-A-y}^{A-y} |g(u)|\ \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-A_1}^{A_1} |f(y)|\ \mathrm{d}y \int_{-A-A_1}^{A+A_1} |g(u)|\ \mathrm{d}u < \infty$$

de unde afirmaţia.

Dacă f, g, h se încadrează într-una din situaţiile de mai sus, atunci produsul de convoluţie există şi este asociativ, adică:

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \tag{1.2}$$

ceea ce rezultă prin schimbarea ordinii de integrare.

1.2 Serii Fourier

Aproximarea funcţiilor prin "suprapunere de armonice" este un procedeu larg utilizat în electronică şi conduce la noţiunea de transformată Fourier. Fizic, aceasta reprezintă o trecere de la semnale în timp la spectrele în frecvenţă. O clasă suficient de generală de funcţii, printre care şi cele monotone pe porţiuni, poate fi aproximată cu serii trigonometrice, iar procedeul este datorat lui Fourier.

Serii Fourier în spaţii Hilbert

Fie H un spaţiu Hilbert. Considerăm un *sistem ortonormat*, adică o familie $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ cu proprietăţile

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \ \forall i, j = 0, \ldots, n.$$

Problemă de aproximare. Pentru $f \in H$ să determinăm $c_k, k = 0, \cdots, n$, astfel ca dacă $y = \sum_{k=0}^{n} c_k e_k$, norma $\|f - y\|$ să fie minimă. Au loc:

$$\|f-y\|^2 = (f - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k, f - \sum_{k=0}^{n} c_k e_k) = (f, f) - \sum_{k=0}^{n} c_k (e_k, f) - \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k}(f, e_k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} c_k\overline{c_k}(e_k, e_k) = (f, f) + \sum_{k=0}^{n}\Big(|(f, e_k)|^2 - c_k(e_k, f) - \overline{c_k}(f, e_k) + \sum |c_k|^2\Big) -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} |(f, e_k)|^2 = (f, f) + \sum_{k=0}^{n}(|(f, e_k) - c_k|^2) - \sum_{k=0}^{n} |(f, e_k)|^2.$$

Deci

$$\|f - y\|^2 = (f, f) + \sum_{k=0}^{n}(|(f, e_k) - c_k|^2) - \sum_{k=0}^{n} |(f, e_k)|^2. \tag{1.3}$$

Norma este minimă dacă $c_k = (f, e_k)$, iar elementul căutat este:

$$y = \sum_{k=0}^{n}(f, e_k)e_k$$

şi reprezintă proiecţia lui f pe subspaţiul generat de $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

Inegalitatea lui Bessel. Dacă în (1.3) înlocuim $c_k = (f, e_k)$, avem:

$$\|f - y\|^2 = (f, f) - \sum_{k=0}^{n} |(f, e_k)|^2$$

de unde deducem

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} |(f, e_k)|^2. \tag{1.4}$$

inegalitate care se numeşte *inegalitatea lui Bessel*.

Dacă sistemul ortonormat este infinit $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ pentru orice n fixat se obţine o cea mai bună aproximare de forma $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(f, e_k)e_k$. De fapt s_n este şirul sumelor parţiale pentru seria

$$\sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k. \tag{1.5}$$

Seria (1.5) se numeşte *seria Fourier* asociată lui f, iar

$$c_k = (f, e_k) \tag{1.6}$$

se numesc *coeficienţii Fourier*. Spunem că seria (1.5) converge în H la s dacă şirul sumelor parţiale *converge în* H la s. Notăm $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k$.

Ne punem problema să studiem în ce cazuri seria Fourier a elementului s are ca sumă pe acesta şi ce proprietăţi suplimentare de convergenţă se pot stabili.

Propoziţia 1.2.1. *Dacă* $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ *este un sistem ortogonal, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ *converge (în* H*) dacă şi numai dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\|^2$ *converge (serie cu termeni pozitivi).*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat, dacă ţinem cont de relaţia

$$\|e_{n+1}+\cdots+e_m\|^2 = (e_{n+1}+\cdots+e_m, e_{n+1}+\cdots+e_m) = \|e_{n+1}\|^2+\cdots+\|e_m\|^2,$$

pentru $m \geqslant n$. ■

Teorema 1.2.1. *Seria Fourier* (1.5) *converge întotdeauna în* H.

Demonstraţie. Din propoziţia precedentă, seria $\sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k$ converge dacă şi numai dacă $\sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2$ converge, iar seria numerică din membrul al doilea este convergentă din inegalitatea lui Bessel. ■

Teorema 1.2.2. *Fie* $e_1, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ *un sistem ortonormat. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $f = \sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k$

2. $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2$.

Demonstraţie. Să demonstrăm 1 ⇒ 2. Are loc

$$\|f\|^2 = (\sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k, \sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2$$

deci 2 este adevărată.

Pentru afirmaţia 2 ⇒ 1, avem

$$\|f - \sum_{k=0}^{\infty}(f, e_k)e_k\| = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \|(f, e_k)|^2,$$

de unde deducem

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2. \tag{1.7}$$

■

Relaţia (1.7) se numeşte *egalitatea lui Parseval.*

Teorema 1.2.3. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1. *Pentru orice $f \in H$, are loc:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n.$$

2. *Dacă $g \in H$ are proprietatea $(g, e_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $g = 0$.*

Demonstraţie. Arătăm că $1 \Rightarrow 2$. Fie $g \in H$, astfel ca $(g, e_n) = 0$. Atunci seria sa Fourier este 0, deci:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} (g, e_n) e_n = 0.$$

$2 \Rightarrow 1$. Dacă $f \in H$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n$ este seria Fourier asociată, atunci:

$$(f - \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n, e_n) = (f, e_n) - (f, e_n) = 0$$

deci are loc:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n.$$

■

Observaţia 1.2.1. Dacă $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ este un sistem ortogonal iar $g_n \neq 0$, $\forall n$, atunci

$$e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$$

devine un sistem ortonormat. Seria Fourier asociată este

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f, e_n) e_n = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \frac{g_n}{\|g_n\|}) \frac{g_n}{\|g_n\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, g_n)}{\|g_n\|^2} g_n. \tag{1.8}$$

Deci coeficienţii Fourier în acest caz sunt

$$\frac{(f, g_n)}{\|g_n\|^2}. \tag{1.9}$$

Serii Fourier clasice (trigonometrice)

În spaţiul $L^2[-\pi, \pi]$, sistemul de funcţii $1, \cos t, \sin t, \ldots, \sin nt, \cos nt, \ldots$ unde $n \in \mathbb{N}$, este ortogonal, relativ la produsul scalar:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Se demonstrează uşor egalităţile

$$(\cos nt, \cos mt) = (\sin nt, \sin mt) = 0, \forall m \neq n, m, n \in \mathbb{N}$$

$$(\sin mt, \cos nt) = 0,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$\|1\|^2 = 2\pi, \quad \|\cos nt\|^2 = \pi, \quad \|\sin nt\|^2 = \pi.$$

Înlocuind în (1.8), găsim seria Fourier asociată funcţiei f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.10}$$

unde

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \ \mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2 \dots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \ \mathrm{d}x,\ \ n = 1, 2 \dots \end{cases} \tag{1.11}$$

sunt coeficienţii Fourier. Coeficienţii formează *spectrul discret* al lui f.

Observaţia 1.2.2. Dacă f este o funcţie pară, rezultă $b_n = 0$, iar dacă f este impară $a_n = 0$.

Deorece funcţia din formula (1.10) este definită pe $\mathbb{R}$ şi periodică se pune problema egalităţii seriei din (1.10), cu funcţia iniţială pe $\mathbb{R}$. În acest caz se prelungeşte f prin periodicitate, astfel

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ f(x + 2\pi), & x \in (-3\pi, -\pi) \\ \dfrac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}, & x = -\pi \\ f(x) & x \in (-\pi, \pi) \\ \dfrac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}, & x = \pi \\ f(x - 2\pi), & x \in (\pi, 3\pi) \\ \dots \end{cases}$$

Dacă f este o funcţie de perioadă 2π, atunci în formulele (1.11) se poate face integrarea pe orice interval de lungime 2π.

Egalitatea lui Parseval devine, înlocuind în (1.7):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right). \tag{1.12}$$

Serie Fourier de cosinusuri

Fie $f : [0, \pi) \to \mathbb{R}$ şi f_p prelungirea prin paritate, adică:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x,) & x \in [0, \pi) \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Atunci coeficienţii Fourier sunt:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_p(x) \cos nx \; \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \; \mathrm{d}x, \; n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n = 0. \end{cases}$$

Serie Fourier de sinusuri

Fie $f : [0, \pi) \to \mathbb{R}$ şi f_i prelungirea prin imparitate, adică:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi) \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Atunci coeficienţii Fourier sunt:

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) \cos nx \; \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \; \mathrm{d}x, \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Are loc următoarea generalizare. Dacă $f : [-l, l) \to \mathbb{R}, \; l > 0$, se consideră sistemul ortogonal

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \ldots$$

căruia i se ataşează seria Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \tag{1.13}$$

unde coeficienţii Fourier sunt daţi de:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{l} \; \mathrm{d}x \\ \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{l} \; \mathrm{d}x. \end{cases} \tag{1.14}$$

Serii Fourier sub formă complexă

Familia

$$e^{\mathrm{i}\; nt}, n \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{i}^2 = -1$$

formează un sistem ortogonal în $L^2[-\pi,\pi]$; într-adevăr:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}\ nt}\ \overline{e^{\mathrm{i}\ nt}}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{\mathrm{i}\ (n-m)t}}{n-m}\ |_{-\pi}^{\pi} = 0$$

iar norma este:

$$\|e^{\mathrm{i}\ nt}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{\mathrm{i}\ nt}|^2\ \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Fie $f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$. Înlocuim în (1.8) şi obţinem seria Fourier bilaterală

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}\ nt} \tag{1.15}$$

unde coeficienţii c_n sunt daţi de:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}\ nx}\ \mathrm{d}x. \tag{1.16}$$

Să stabilim legătura dintre seriile (1.10) şi (1.15); dacă folosim definiţia exponenţialei în complex $e^{\mathrm{i}\ nt} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt$, avem imediat $c_0 = \frac{a_0}{2}$ şi:

$$\begin{aligned} c_n e^{\mathrm{i}\ nt} + c_{-n}e^{-\mathrm{i}\ nt} &= (c_n + c_{-n})\cos nt + \mathrm{i}(c_n - c_{-n})\sin nt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-\mathrm{i}\ nx} + e^{i\ nx})f(x)\ \mathrm{d}x\cos nt + \\ &+ \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-\mathrm{i}\ nx} - e^{\mathrm{i}\ nx})f(x)\ \mathrm{d}x\sin nt = \\ &= a_n\cos nt + b_n\sin nt. \end{aligned}$$

Observăm că suma parţială a seriei (1.10) coincide cu suma parţială simetrică a seriei (1.15). De asemenea seria (1.15) poate fi simetric convergentă, în sensul că există

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}\ kt}$$

dar nu este convergentă, adică nu există

$$\lim_{n\to\infty, m\to\infty}\sum_{k=-m}^{n} c_k e^{\mathrm{i}\ kt}.$$

În cazul seriilor sub forma complexă, egalitatea lui Parseval devine:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{1.17}$$

Să mai observăm că dacă

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; z \in \mathbb{C}$$

este o serie de puteri şi calculăm acestă serie pe cercul unitate, adică pentru $z = e^{in\theta}$ avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

deci se obţine o serie Fourier. Dacă raza de convergenţă este > 1, atunci seria Fourier este convergentă.

Convergenţa unei serii Fourier într-un punct şi pe o mulţime

Fie f o funcţie periodică şi seria sa Fourier asociată sub forma (1.15). Evaluăm şirul sumelor parţiale.

$$s_{m,n}(t) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}\, kx} \,\mathrm{d}x e^{\mathrm{i}\, kt} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-m}^{n} e^{\mathrm{i}\, k(t-x)} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}\, m(t-x)} \frac{1 - e^{\mathrm{i}\,(t-x)(n+m+1)}}{1 - e^{\mathrm{i}\,(t-x)}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-\mathrm{i}\, m(t-x)} - e^{\mathrm{i}\,(t-x)(n+1)}}{e^{\frac{j}{2}(t-x)} \left(e^{-\frac{i}{2}(t-x)} - e^{\frac{\mathrm{i}}{2}(t-x)} \right)} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-\mathrm{i}\,(t-x)(m+\frac{1}{2})} - e^{\mathrm{i}\,(t-x)(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(t-x)} - e^{\frac{\mathrm{i}}{2}(t-x)}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{e^{\mathrm{i}u(m+\frac{1}{2})} - e^{-\mathrm{i}u(n+\frac{1}{2})}}{e^{\mathrm{i}\frac{u}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{u}{2}}} \,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mathrm{i}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{e^{\mathrm{i}u(m+\frac{1}{2})} - e^{-\mathrm{i}u(n+\frac{1}{2})}}{\sin\frac{u}{2}} \,\mathrm{d}u.$$

Dacă aplicăm calculul precedent funcţiei identic 1, găsim:

$$1=\frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\mathrm{i}u(m+\frac{1}{2})}-e^{-\mathrm{i}u(n+\frac{1}{2})}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u$$

şi prin scădere avem:

$$s_{m,n}(t)-f(t)=\frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t+u)-f(t))\frac{e^{\mathrm{i}u(m+\frac{1}{2})}-e^{-\mathrm{i}u(n+\frac{1}{2})}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u. \tag{1.18}$$

Dacă în (1.18) punem $m=n$, obţinem:

$$s_n(t)-f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t+u)-f(t))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u. \tag{1.19}$$

În practică intervin următoarele situaţii.

- Dacă f are în t_0 derivată finită, atunci
$$\lim_{m,n\to\infty} s_{m,n}(t_0)=f(t_0).$$
- Dacă f are în t_0 punct de discontinuitate de speţa I şi există $f'(t_0+0)$, $f'(t_0-0)$, sumele parţiale simetrice ale seriei Fourier converg şi
$$\lim_{m,n\to\infty} s_{m,n}(t_0)=\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}.$$
- **Criteriul Dirichlet** Dacă $f:[-\pi,\pi)\to R$ este monotonă pe porţiuni şi este mărginită, atunci pentru orice $t_0\in(-\pi,\pi)$ are loc:
$$\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt_0+b_n\sin nt_0).$$

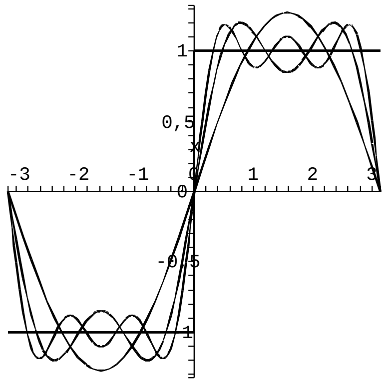
În particular, dacă f este continuă în t_0, atunci suma seriei Fourier coincide cu valoarea funcţiei.

Aplicaţia 1.2.1. Să dezvoltăm în serie de sinusuri funcţia

$$f(t)=\frac{\pi-t}{2},\quad 0\leqslant t<\pi.$$

Prelungirea prin imparitate este

$$f_i(t)=\begin{cases}\frac{\pi-t}{2} & t\in(0,\pi]\\ 0 & t=0\\ -\frac{\pi+t}{2} & t\in[-\pi,0).\end{cases}$$



■

Figura 1.2: Fenomenul Gibbs

Evident că $a_n = 0$, iar

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - t}{2}\sin nt \ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi - t}{2}\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n}.$$

Deci are loc scrierea

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Aplicaţia 1.2.2. (**fenomenul Gibbs**) Să dezvoltăm în serie Fourier

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Funcţia este impară, avem deci $a_n = 0$ şi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx \ \mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

Deci $b_{2n} = 0$ şi $b_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$. Rezultă egalitatea

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x & x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Să aproximăm funcţia cu şirul sumelor parţiale. Dacă $n = 0$, avem

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \sin x$$

pentru $n = 1$

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x).$$

Reprezentăm aceste funcţii şi obţinem graficul de mai sus. Se poate demonstra că limita ordonatei primului maxim, pentru $n \to \infty$ este aproximativ $1,17$.

Teorema 1.2.4 (**Fejer**). *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi periodică de perioadă 2π, atunci şirul mediilor aritmetice ale lui s_k converge uniform la f, adică*

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \to f, \quad \textit{uniform pe } (-\pi, +\pi).$$

Demonstraţie. Avem:

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} u \sin \frac{u}{2}}{\sin^2 \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{1 - \cos(n+1)u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{\sin^2 \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u.$$

Evaluăm diferenţa

$$\sigma_n(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+u) - f(t)}{n+1} \frac{\sin^2 \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \, \mathrm{d}u.$$

Notăm $\varphi_t(u) = \dfrac{f(t+u) - f(t)}{n+1}$ şi $K_n(u) = \dfrac{\sin^2 \frac{2n+1}{2} u}{2\sin^2 \frac{u}{2}}$. Aplicăm modulul şi majorăm, după care deducem:

$$|\sigma_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_t(u)||K_n(u)| \, \mathrm{d}u.$$

Din continuitatea lui f, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta \in (0, \pi)$ astfel ca $|\varphi_t(u)| < \varepsilon, \ \forall u \in [-\delta, \delta]$ şi desfacem integrala de mai sus pe domeniile $|u| \leqslant \delta$ şi $|u| > \delta$. Obţinem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|u|\leqslant\delta} |\varphi_t(u)||K_n(u)| \, \mathrm{d}u < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|u|\leqslant\delta} |K_n(u)| \, \mathrm{d}u$$

care tinde la 0, pentru $\varepsilon \to 0$. Iar

$$\int_{|u|>\delta} |\varphi_t(u)||K_n(u)| \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|u|>\delta} |\varphi_t(u)| \frac{\mathrm{d}u}{(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{n+1} M$$

unde M reprezintă valoarea integralei. Urmează că şi aceasta tinde la 0, dacă n tinde la infinit. ∎

Consecinţe ale teoremei lui Fejer

Teorema 1.2.5. *Dacă f este continuă şi 2π periodică, atunci seria Fourier converge în medie pătratică la f.*

Teorema 1.2.6. *Dacă f este continuă şi 2π periodică, iar seria Fourier converge uniform, atunci suma ei este f.*

Să mai observăm că dacă seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

sunt convergente, atunci folosind criteriul de majorare Weierstrass, rezultă că seria Fourier este uniform convergentă.

Să încheiem acest paragraf cu calculul facut de Fourier pentru stabilirea formală a unei formule de reprezentare, care îi poartă numele. Această formulă stă la baza definiţiei transformatei Fourier.

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie $2l$-periodică, continuă pe porţiuni şi cu derivate laterale finite în fiecare punct, atunci are loc o generalizare a situaţiei anterioare

$$\frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

unde:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\ \mathrm{d}x \text{ şi } b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\ \mathrm{d}x$$

cu interpretarea că semnalul f este o suprapunere de oscilaţii armonice de diverse ordine.

Dacă f nu este periodică, restrângem pe f la intervalul $[-l, l)$ şi prelungim prin periodicitate la $\mathbb{R}$. Funcţia rezultată o notăm cu f_1. Obţinem:

$$\frac{f_1(t-0)+f_1(t+0)}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\ \mathrm{d}x\right)\cos\frac{k\pi t}{l} + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\ \mathrm{d}x\right)\sin\frac{k\pi t}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l} + \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\ \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(e^{\mathrm{i}\frac{k\pi(t-x)}{l}} + e^{\mathrm{i}\frac{k\pi(t-x)}{l}}\right)\ \mathrm{d}x.$$

Notăm $\omega = \frac{\pi}{l}$ şi rezultă

$$\frac{f_1(t-0)+f_1(t+0)}{2} = \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\mathrm{i}k\omega(t-x)}\ \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\mathrm{i}k\omega(t-x)}\omega\ \mathrm{d}x.$$

Fie $\omega_k = k\omega$ şi $\omega = k\omega - (k-1)\omega = \omega_k - \omega_{k-1}$. Atunci formula precedentă devine

$$\frac{f_1(t-0)+f_1(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\mathrm{i}k\omega(t-x)}(\omega_k - \omega_{k-1})\ \mathrm{d}x.$$

În ipoteze suplimentare asupra lui f, dacă l tinde la ∞, formal rezultă *formula de reprezentare integrală Fourier*, sau *integrala Fourier.*

$$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\omega t}\ \mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x,\quad \forall t\in\mathbb{R}. \tag{1.20}$$

1.3 Funcţii complexe

Fie D un deschis conex (domeniu) $D \subseteq \mathbb{C}$. Dacă se notează cu $z = x + \mathrm{i}y \in D$ variabila funcţiei, atunci valoarea funcţiei în punctul z va fi numărul complex

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),\ z \in D \subseteq \mathbb{C}$$

unde funcţiile reale

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z),\ v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$$

reprezintă partea reală, respectiv imaginară a funcţiei complexe f.

1.3.1 Limite şi continuitate

Topologia planului complex fiind de fapt topologia spaţiului euclidian bidimensional $\mathbb{R}^2$, noţiunile de limită şi continuitate se extind cu uşurinţă şi în complex.

Definiţia 1.3.1. *Fie z_0 un punct de acumulare al mulţimii $D \subseteq \mathbb{C}$. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ are limita l în punctul z_0 (se scrie $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$) dacă este îndeplinită una din următoarele afirmaţii echivalente:*

1. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, z_0)$ astfel încât $\forall z \in D$ cu proprietatea $0 < |z - z_0| < \eta$ avem $|f(z) - l| < \varepsilon$.

2. pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui z_0 astfel încât $\forall z \in D \cap U$, avem $f(z) \in V$.

3. pentru orice şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, şirul $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = l$.

Propoziţia 1.3.1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l = l_1 + \mathrm{i}l_2$ *dacă şi numai dacă*

$$l_1 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) \text{ şi } l_2 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y).$$

Definiţia 1.3.2. *Fie $z_0 \in D$ un punct de acumulare al mulţimii D. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte continuă în z_0 dacă $(\exists) \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este continuă în punctul z_0 dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $z \in D$ cu proprietatea că $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Propoziţia 1.3.2. *Continuitatea funcţiei f în z_0 este echivalentă cu continuitatea funcţiilor u , v în punctul (x_0, y_0).*

Definiţia 1.3.3. *Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este mărginită pe D dacă există o constantă $0 < M < \infty$ astfel încât $|f(z)| \leqslant M$, $\forall z \in D$.*

1.3.2 Derivabilitate

Definiţia 1.3.4. *Fie $z_0 \in D$. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este derivabilă (monogenă) în z_0 dacă:*

$$(\exists) \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{not}{=} f'(z_0)$$

(sau $(\exists) \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \overset{not}{=} f'(z_0)$) şi este finită.

Definiţia 1.3.5. *O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ derivabilă în orice punct din D se numeşte* olomorfă (analitică) *pe D.*

Teorema 1.3.1. *Fie $f, g : D \to \mathbb{C}$ două funcţii complexe de variabilă complexă. Dacă f şi g sunt monogene într-un punct $z_0 \in D$, atunci şi funcţiile $f \pm g$, fg , f/g ($g(z_0) \neq 0$) sunt monogene în acest punct şi între derivatele lor există relaţiile :*

1.

$$[\alpha f(z)]'_{z=z_0} = \alpha f'(z_0), \alpha \in \mathbb{C}$$

2.

$$[f(z) \pm g(z)]'_{z=z_0} = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

3.

$$[f(z)g(z)]'_{z=z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

4.

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'_{z=z_0} = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.$$

Teorema 1.3.2. *Fie $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ două domenii şi $f : D_1 \to \mathbb{C}$, $g : D_2 \to \mathbb{C}$. Dacă f este monogenă într-un punct $z_0 \in D_1$ şi g este monogenă în punctul $w_0 = f(z_0) \in D_2$ atunci funcţia compusă $h = g \circ f$ este monogenă în z_0 şi avem :*

$$[h(z)]'_{z=z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Teorema 1.3.3 (Cauchy-Riemann). *Fie $f : D \to \mathbb{C}$. f este monogenă în $z_0 \in D$, dacă şi numai dacă u , v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) iar derivatele lor parţiale satisfac condiţiile:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{1.21}$$

numite condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann. În acest caz avem:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.22}$$

Observaţia 1.3.1. Orice funcţie monogenă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca nu este adevărată.

Aplicaţia 1.3.1 Funcţia $f(z) = \overline{z}$ este continuă în orice punct z_0 dar nu este monogenă.

Corolarul 1.3.1. *Dacă o funcţie este olomorfă într-un domeniu D şi are derivata nulă, atunci ea este constantă în domeniul D.*

Observaţia 1.3.2. Ca o consecinţă a teoremei Cauchy-Riemann, se poate determina o funcţie olomorfă pe un domeniu, când i se cunoaşte partea reală sau partea imaginară.

Aplicaţia 1.3.2. Să se determine funcţia olomorfă (pe $\mathbb{C}$) $f = u + \mathrm{i}v$ ştiind că

$$u(x, y) = e^x \cos y \text{ şi } f(0) = 1.$$

Din prima condiţie a lui Cauchy-Riemann se obţine

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

ceea ce înseamnă că

$$v(x, y) = \int e^x \cos y \, \mathrm{d}y = e^x \sin y + \varphi(x).$$

Din a doua condiţie a lui Cauchy-Riemann se obţine

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + \varphi'(x)$$

de unde rezultă că că $\varphi'(x) = 0$ adică $\varphi(x) = c$. Din condiţia $f(0) = 1$ rezultă $c = 0$ şi deci expresia funcţiei este dată de

$$f(z) = e^x \cos y + \mathrm{i}e^x \sin y = e^z.$$

1.3.3 Funcţii complexe elementare

Funcţiile complexe elementare sunt extensii la mulţimea $\mathbb{C}$ a funcţiilor definite pe $\mathbb{R}$.

Funcţia putere: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i} \sin n\theta).$$

Funcţia polinomială: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$, iar derivata sa are aceeaşi formă ca în cazul funcţiilor reale.

Funcţia raţională: $f : \{z \in \mathbb{C} | Q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ este olomorfă pe tot domeniul $\{z \in \mathbb{C} | Q(z) \neq 0\}$, iar derivata sa are aceeaşi formă ca în cazul funcţiilor reale.

Funcţia radical de ordin n: $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$k = \overline{0, n-1}$. Funcţia radical nu este olomorfă pe tot planul $\mathbb{C}$.

Funcţia exponenţială: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$,

$$f(z) = e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x e^{\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Funcţia exponenţială este olomorfă pe $\mathbb{C}$, iar $(e^z)' = e^z$; în plus, este periodică de perioada principală $2\pi\mathrm{i}$.

Funcţia logaritmică: $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \ln\, z$,

$$f(z) = \ln\, z = \ln(re^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}) = \ln\, r + \ln e^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} = \ln\, r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi)$$

unde $k \in \mathbb{Z}$.

Funcţia putere generalizată: $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Funcţii circulare (sinus şi cosinus):

$$\begin{cases} \sin z &= \dfrac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \\ \cos z &= \dfrac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \end{cases} \quad \text{(formulele lui Euler).} \tag{1.23}$$

Funcţii hiperbolice:

$$\begin{cases} \mathrm{sh}\ z &= \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \mathrm{ch}\ z &= \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases} \tag{1.24}$$

1.3.4 Integrarea funcţiilor complexe de variabilă complexă

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ şi o curbă de lungime finită $\Gamma \subset D$, ale cărei ecuaţii parametrice sunt date de

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$$

$t \in [a, b]$, netedă sau netedă pe porţiuni, iar f continuă pe Γ, Luăm o diviziune prin punctele $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ şi notăm $z_k = x(t_k) + iy(t_k) \in \Gamma$. Pe fiecare arc ce uneşte z_{k-1} cu z_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ alegem un punct $\xi_k \in \Gamma$. Formăm sumele :

$$S_n(f, \xi, d_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Notăm $\mu_{d_n} := \max\{|z_k - z_{k-1}|\}$. Dacă

$$\lim_{\mu_{d_n} \to 0} S_n(f, \xi, d_n)$$

există, indiferent de alegerea punctelor ξ_k spunem că funcţia este integrabilă de-a lungul curbei între a şi b şi se notează limita cu $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$. Are loc

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma [u(x, y)\ \mathrm{d}x - v(x, y)\ \mathrm{d}y] + \mathrm{i} \int_\Gamma [u(x, y)\ \mathrm{d}y + v(x, y)\ \mathrm{d}x] . \tag{1.25}$$

Aplicaţia 1.3.3. Să se calculeze $I = \int_\Gamma \overline{z}\ \mathrm{d}z$ de la $z = 0$ la $z = 4 + 2\mathrm{i}$ de-a lungul curbei Γ dată de $z = t^2 + \mathrm{i}t$.
Pentru $z = 0$ şi $z = 4 + 2\mathrm{i}$ pe curba Γ avem $t = 0$ şi $t = 2$.

$$I = \int_0^2 (t^2 - \mathrm{i}t)\ \mathrm{d}(t^2 + \mathrm{i}t) = \int_0^2 (2t^3 + t - \mathrm{i}t)\ \mathrm{d}t = 10 - \frac{8\mathrm{i}}{3}.$$

Fie $\Gamma : |z - z_0| = r$; atunci $I = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi\mathrm{i}$. Se ştie că $z - z_0 = re^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ $\mathrm{d}z = r\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$, deci se obţine : $I = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}$.
Lungimea drumului de integrare Γ: $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ este dată de formula:

$$L(\Gamma) = \int_a^b |z'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Fie $D \subset \mathbb{C}$, o curbă $\Gamma \subset D$, netedă sau netedă pe porţiuni şi $f : D \to \mathbb{C}$ continuă pe Γ . Fie $M = \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$. În aceste condiţii avem

$$\left| \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant ML(\Gamma).$$

Teorema 1.3.4 (teorema fundamentală a lui Cauchy). *Fie D un domeniu simplu conex iar $f : D \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.*

Atunci $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$, *oricare ar fi curba Γ simplă, închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, situată în întregime în D.*

Definiţia 1.3.6. *O mulţime deschisă şi conexă a cărei frontieră este formată din mai multe curbe închise se numeşte* multiplu conexă.

Observaţia 1.3.3. În cazul în care domeniul este multiplu conex se utilizează generalizarea teoremei fundamentale a lui Cauchy.

Teorema 1.3.5 (generalizarea teoremei fundamentale a lui Cauchy). *Dacă :*

a) D este un domeniu multiplu conex delimitat de curba Γ_0 în exterior şi curbele Γ_k $1 \leqslant k \leqslant n$ în interior, netede sau netede pe porţiuni, care sunt frontiere ale unor domenii mărginite D_k;

b) $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D, atunci:

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)\mathrm{d}z. \tag{1.26}$$

Observaţia 1.3.4. Sensul pozitiv de parcurgere al unei curbe închise este sensul în care deplasându-ne de-a lungul curbei, domeniul delimitat de aceasta rămâne în partea stângă (sensul trigonometric).

Teorema 1.3.6 (consecinţa teoremei lui Cauchy). *Dacă :*

a) D este un domeniu simplu conex ;

b) $L_1, L_2 \subset D$ sunt două arce de curbă simple, netede sau netede pe porţiuni care au aceleaşi extremităţi z_0 şi z şi sunt orientate de la z_0 la z ;

c) $f : D \to \mathbb{C}$, f este olomorfă pe D, atunci:

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

Teorema 1.3.7 (formula integrală a lui Cauchy). *Dacă:*

a) D este un domeniu simplu conex;

b) $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D , atunci oricare ar fi curba Γ situată în întregime în D, netedă sau netedă pe porţiuni şi oricare ar fi $z \in \Delta$ domeniul mărginit de Γ, are loc formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\, \mathrm{d}t. \tag{1.27}$$

Observaţia 1.3.5. Formula integrală a lui Cauchy este consecinţă directă a teoremei integrale a lui Cauchy, obţinând o relaţie foarte importantă între valorile funcţiei pe frontiera domeniului şi valorile funcţiei în interiorul domeniului.

Cu alte cuvinte, dacă funcţia este olomorfă pe un domeniu şi i se cunosc valorile pe o curbă, formula integrală a lui Cauchy ne permite să calculăm valorile funcţiei în orice punct din interiorul acelei curbe. Această proprietate este specifică funcţiilor de variabilă complexă.

Aplicaţia 1.3.4. Să se calculeze integrala :

$$I = \int_{|z+\mathrm{i}|=2} \frac{\cos z}{z(z-3\mathrm{i})} \mathrm{d}z.$$

Se aplică formula integrală a lui Cauchy şi se obţine

$$I = 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{\cos z}{z - 3\mathrm{i}} \right) |_{z=0} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Definiţia 1.3.7. *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi $\Gamma \subset D$ un arc de curbă neted sau neted pe porţiuni. Funcţia*

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z} \, \mathrm{d}t, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \tag{1.28}$$

se numeşte integrala de tip Cauchy.

Teorema 1.3.8. *Funcţia $F(z)$ (integrala de tip Cauchy) este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, iar derivata sa se obţine derivând sub semnul de integrare în raport cu z:*

$$F'(z) = \int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^2} \, \mathrm{d}t, \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{1.29}$$

Teorema 1.3.9. *Dacă :*

a) D este un domeniu simplu conex :

b) $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D;

c) Γ este o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, situată în întregime în D, împreună cu domeniul Δ pe care îl mărgineşte.

Atunci funcţia f este indefinit derivabilă (admite derivate de orice ordin) pe D şi avem:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}t, \forall z \in \Delta. \tag{1.30}$$

Aplicaţia 1.3.5. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_{|z-1|=3} \frac{z}{(z-2)^3(z+5)}\,\mathrm{d}z.$$

$$I = \frac{2\pi \mathrm{i}}{2!}\left[\left(\frac{z}{z+5}\right)''\right]|_{z=2} = \frac{10\pi \mathrm{i}}{27}.$$

Teorema 1.3.10 (**Morera**). *Dacă :*

a) D este un domeniu simplu conex,

b) $f : D \to \mathbb{C}$ este continuă în D,

c) oricare ar fi curba Γ simplă, închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, situată în întregime în D are loc $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ atunci funcţia f este olomorfă în D.

Teorema 1.3.11 (**Liouville**). *Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi mărginită în tot planul complex. Atunci f este constantă.*

1.3.5 Reprezentarea funcţiilor complexe prin serii

Se numeşte serie de numere complexe suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1.31}$$

unde $z_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \geqslant 1$.

Se spune că o serie numerică este convergentă şi are suma S dacă şirul sumelor parţiale converge către S, ceea ce înseamnă că $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, unde $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$. Altfel, seria se numeşte divergentă. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, cu $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ este convergentă şi are suma $S = X + \mathrm{i}Y$ dacă şi numai dacă seriile reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente şi au suma X, respectiv Y.

Fie $(f_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de funcţii complexe, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Se numeşte serie de funcţii complexe suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. O clasă importantă de serii de funcţii o constituie seriile de puteri numite şi serii întregi.

Definiţia 1.3.8. *Se numeşte* serie de puteri *o serie de forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

unde $z_0, z, c_n \in \mathbb{C}$ *pentru* $n \geqslant 0$.

Seria Taylor

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D şi $z_0 \in D$ un punct arbitrar. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (1.32)$$

unde

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

se numeşte *seria Taylor* a funcţiei f în jurul lui z_0. Pentru $z_0 = 0$ seria se numeşte *serie MacLaurin*.

Teorema 1.3.12. *Fie* $F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă pe* D *şi* $z_0 \in D$. *Fie* $\Delta(z_0, r)$ *un disc deschis cu centrul în* z_0 *şi rază* r , *a cărui frontieră o notăm cu* Γ.

Dacă $\overline{\Delta} := \Delta \cup \Gamma \subset D$, *atunci seria Taylor a funcţiei* f *în jurul punctului* z_0 *este convergentă pe* Δ *şi oricare ar fi* z *din interiorul acestui disc are loc egalitatea:*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \cdots$$

În mod firesc se pune întrebarea dacă seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

este convergentă şi spre cine converge.

Teorema 1.3.13 (Abel). *Pentru orice serie de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

există $R \in [0, \infty]$, *numit raza de convergenţă , astfel încât seria converge în discul* $|z| < R$ *şi diverge în exteriorul său. În plus:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Definiţia 1.3.9. *Orice funcţie olomorfă pe* $\mathbb{C}$ *se numeşte funcţie* întreagă.

Observaţia 1.3.6. 1. Funcţiile polinomiale, exponenţiale, hiperbolice şi circulare sunt întregi.

2. Seria Taylor a unei funcţii întregi în jurul oricărui punct din D are raza de convergenţă $R = \infty$.

Aplicaţia 1.3.6. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi deci admite dezvoltare în serie Taylor în jurul oricărui punct din $\mathbb{C}$. Cum $f^{(n)}(z) = e^z$, $(\forall)n \geqslant 0$ rezultă că

$$e^z = e^{z_0} + \frac{z - z_0}{1!}e^{z_0} + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}e^{z_0} + \cdots$$

Pentru $z_0 = 0$ se obţine

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \ (\forall)z \in \mathbb{C}.$$

Analog se obţin dezvoltările în serie MacLaurin ale altor funcţii întregi:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ (\forall)z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ (\forall)z \in \mathbb{C}$$

$$\text{sh } z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ (\forall)z \in \mathbb{C}$$

$$\text{ch } z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ (\forall)z \in \mathbb{C}$$

Un rol important îl au seriile geometrice:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \quad \text{pentru } |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \quad \text{pentru } |z| < 1.$$

Aplicaţia 1.3.7. Dezvoltaţi funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ în serie Mac Laurin.

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots$$

Se derivează :

$$-\frac{2z}{(1+z^2)^2} = -2z + 4z^3 - \cdots + (-1)^n 2nz^{2n-1} + \cdots$$

sau

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = 1 - 2z^2 - \cdots + (-1)^n n z^{2n-2} + \ldots$$

Serii Laurent

Vom nota $\Delta(z_0, r, R) := \{z | r < |z - z_0| < R\}$ o coroană circulară. Fie $f : \Delta(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ olomorfă pe D.

Definiţia 1.3.10. *Se numeşte* serie Laurent *a funcţiei f centrată în z_0 o serie de forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (1.33)$$

$$\textit{unde } c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(t)}{(z - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}t. \quad (1.34)$$

Unei serii Laurent i se asociază două serii de funcţii :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

care se numeşte *partea principală* şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

care se numeşte *partea tayloriană.*

Definiţia 1.3.11. *Seria Laurent este convergentă într-un punct z din $\mathbb{C}$ dacă partea principala şi partea tayloriană sunt convergente în punctul z.*

Suma unei serii Laurent, convergentă într-un punct z este egală cu suma părţii principale, la care se adaugă suma părţii tayloriene. O serie Laurent este convergentă pe o coroană circulară $\Delta(z_0, r, R)$ şi suma sa este olomorfă pe această coroană circulară.

Teorema 1.3.14. *Fie $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D şi $z_0 \in D$ un punct arbitrar.*

Presupunem că $\{z \in \mathbb{C} | r \leqslant |z - z_0| \leqslant R\} \subset D$. Atunci funcţia admite o dezvoltare în serie Laurent, convergentă pe acestă coroană şi oricare ar fi z în interiorul ei are loc egalitatea :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$$

Γ *fiind un cerc cu centrul în* z_0 *şi de rază* $\rho \in [r, R]$.

Aplicaţia 1.3.8. Dezvoltaţi funcţia $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^3}$ în serie Laurent în jurul lui $z_0 = 2$.

Notăm $u = z - 2$, ceea ce înseamnă că vom dezvolta în serie funcţia: $f(u) = \dfrac{e^{u+2}}{u^3}$ în jurul punctului $u_0 = 0$.

$$f(u) = e^2 \frac{e^u}{u^3} = e^2 \frac{1}{u^3} \left(1 + \frac{u}{1!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \right) =$$

$$= e^2 \left[\frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} \frac{1}{2(z-2)} + \cdots + \frac{(z-2)^{n-3}}{n!} + \cdots \right].$$

Aplicaţia 1.3.9. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{2,3\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ în coroana circulară $2 < |z| < 3$.

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3(1-\frac{z}{3})} - \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} =$$

$$= -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots + \frac{z^n}{3^n} + \cdots \right) -$$

$$-\frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \cdots + + \frac{2^n}{z^n} + \cdots \right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} z^{-n}.$$

1.3.6 Singularităţile unei funcţii complexe

Definiţia 1.3.12. *Punctul* $z_0 \in \mathbb{C}$ *este un* punct singular *al funcţiei* f *dacă în orice vecinătate* $\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ *a lui* z_0 *se găsesc atât puncte în care* f *este monogenă cât şi puncte în care* f *nu este monogenă sau nu este definită.*

Definiţia 1.3.13. *Punctul* $z_0 \in \mathbb{C}$ *se numeşte* punct singular izolat *al lui* f *dacă există un număr real* $r > 0$ *astfel încât* f *este olomorfă în coroana circulară* $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$ *dar nu este definită sau nu este monogenă în* z_0.

Definiţia 1.3.14. *Punctul* ∞ *este* punct singular izolat *pentru funcţia* f, *care nu este definită în* ∞, *dacă* f *este olomorfă pe exteriorul unui disc de rază oricât de mare centrat în origine.*

În ceea ce priveşte natura punctelor singulare izolate ale funcţiei f, există trei posibilităţi:

1) Punctul singular izolat $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct singular aparent (înlăturabil, eliminabil) al lui f dacă $(\exists) \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$.

Aplicaţia 1.3.10. Pentru funcţia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ punctul $z_0 = 0$ este punct singular aparent, pentru că în acest punct funcţia nu este definită, pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funcţia este olomorfă, iar $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$.

2) Punctul singular izolat $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte punct singular esenţial al funcţiei f dacă nu există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Aplicaţia 1.3.11. Pentru funcţia $f(z) = e^{1/z^2}$ punctul $z_0 = 0$ este punct singular esenţial pentru că funcţia nu este definită în punctul $z_0 = 0$, fiind olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi cum pentru $z = x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

iar pentru $z = \mathrm{i}y$ cu $y \in \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{y \to 0} f(iy) = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ nu există .

3) Punctul singular izolat $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte pol de ordinul $n \geqslant 1$ al funcţiei f dacă $(\exists) \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z)$ şi este din $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aplicaţia 1.3.12. Pentru funcţia $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ punctele $z = 0$ şi $z = 1$ sunt poli de ordinul 1 (poli simpli) pentru că funcţia nu este definită în aceste puncte, fiind olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ şi $\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{1-z} = 1$, $\lim\limits_{z \to 1} (z-1) f(z) = \lim\limits_{z \to 1} \left(-\dfrac{1}{z} \right) = -1$.

Definiţia 1.3.15. *O funcţie f se numeşte* meromorfă *într-un domeniu, dacă în acel domeniu nu are alte singularităţi decât poli.*

Teorema 1.3.15. *Dacă punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este un punct singular izolat aparent pentru funcţia f atunci există o vecinătate $\Delta(z_0, r)$ a lui z_0 în care posedă o dezvoltare în serie Laurent de tipul*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ceea ce înseamnă că partea principală a seriei Laurent este zero.

Teorema 1.3.16. *Punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este pol de ordin m pentru funcţia f dacă şi numai dacă există o vecinătate $\Delta(z_0, r)$ a lui z_0 în care*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

cu $c_{-m} \neq 0$, ceea ce înseamnă că partea principală a dezvoltării are numai un număr finit de termeni nenuli.

Teorema 1.3.17. *Punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este un punct singular esenţial pentru funcţia f dacă şi numai dacă există o vecinătate $\Delta(z_0, r)$ a lui z_0 în care*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

cu $\{m \in \mathbb{N}, c_{-m} \neq 0\}$ mulţime infinită.

Punctul infinit

În cazul în care funcţia complexă este definită în planul complex pentru $|z| > R$, punctul ∞ constituie un punct singular izolat al funcţiei date.

În ceea ce priveşte natura punctului ∞ ca punct singular izolat pentru o funcţie f, studiul său se reduce la studiul punctului $z = 0$ pentru funcţia $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f în vecinătatea punctului ∞, se obţine din dezvoltarea în serie a funcţiei $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ în vecinătatea punctului 0, înlocuind pe z cu $\frac{1}{z}$. Se obţine:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \ |z| > R.$$

Aplicaţia 1.3.13. Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z}{z^3 + z}$ are o singularitate aparentă în $z = 0$, deoarece $\lim_{z \to 0} f(z) = \frac{1}{2}$ şi polii $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$. Funcţia

$$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^2}{1 + z^2}$$

este olomorfă în jurul punctului $z = 0$, deci ∞ este singularitate aparentă pentru funcţia f.

1.3.7 Teoria reziduurilor şi aplicaţii

Fie $f : D \to \mathbb{C}$ iar z_0 un punct singular izolat al funcţiei f , iar :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

dezvoltarea în serie Laurent.

Definiţia 1.3.16. *Se numeşte* reziduul funcţiei f *în punctul* z_0 *şi se notează* Rez (f, z_0) *numărul definit de relaţia :*

$$\text{Rez } (f, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z \tag{1.35}$$

unde Γ *este un cerc cu centrul în* z_0 *situat în coroana circulară de rază* ρ *,* $0 < \rho < r$ *, parcurs în sens pozitiv.*

Teorema 1.3.18. *Fie* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă pe* D*, cu excepţia punctului singular izolat* z_0*, atunci calculul reziduului funcţiei* f *în punctul* z_0 *se poate face astfel :*

1) Rez $(f, z_0) = c_{-1}$ *unde* c_{-1} *este coeficientul lui* $\dfrac{1}{z - z_0}$ *din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *pe* $0 < |z - z_0| < r$.

2)

$$\text{Rez } (f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$$

dacă z_0 *este un pol al funcţiei* f *şi* m *este ordinul său de multiplicitate.*

3)

$$\text{Rez } (f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dacă z_0 *este un pol simplu al funcţiei* f *şi* f *se poate scrie ca un cât de două funcţii olomorfe* $f = \dfrac{g}{h}$, $h(z_0) \neq 0$.

În situaţia punctului ∞, f este olomorfă pe exteriorul unui disc de rază oricât de mare. Notăm cu Γ_R frontiera discului de rază R, cu centrul în origine, $\Delta(0, R)$. Orientarea acestei frontiere se face de aşa manieră încât parcurgând-o, exteriorul discului rămâne în stânga, adică invers decât orientarea normală, motiv pentru care se notează cu Γ_R^-.

Definiţia 1.3.17. *Se numeşte reziduul funcţiei* f *în punctul* ∞ *şi se notează cu* Rez(f, ∞) *coeficientul lui* z^{-1} *din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei* f *în vecinătatea punctului de la infinit, luat cu semn schimbat* $(-c_{-1})$.

O exprimare echivalentă :

$$\mathrm{Rez}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_R^-} f(z)\ \mathrm{d}z \text{ sau } \mathrm{Rez}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Transformarea $\zeta=\dfrac{1}{z}$ duce exteriorul discului de rază R în interiorul discului de rază $\frac{1}{R}$, ambele centrate în 0. De asemenea, $\zeta=\dfrac{1}{z}$ duce punctul $z=0$ în punctul ∞ şi punctul ∞ în $z=0$.

Teorema 1.3.19. *Calculul reziduului în punctul ∞ al lui f se reduce la calculul reziduului în punctul $\zeta=0$ al funcţiei $g(\zeta)=-\dfrac{1}{\zeta^2}f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.*

Observaţia 1.3.7. Ţinând seama de faptul că $\mathrm{Rez}(f,\infty)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{\Gamma_R^-} f(z)\ \mathrm{d}z$, rezultă $\mathrm{Rez}(f,\infty)=c_{-1}$, unde c_{-1} este coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ din dezvoltarea lui g în vecinătatea lui $\zeta=0$.

Teorema 1.3.20 (teorema reziduurilor). *Fie $f:D\to\mathbb{C}$ şi Γ o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, inclusă în întregime în D. Dacă f este olomorfă pe D, cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate $a_1,a_2,\cdots,a_n$ situate în domeniul $\Delta\subset D$, Δ fiind delimitat de frontiera Γ care nu trece prin niciunul din aceste puncte, atunci*

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}\ (f,a_k). \tag{1.36}$$

Observaţia 1.3.8. 1. Teorema reziduurilor poate fi considerată ca o consecinţă a teoremei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe.

2. Teorema reziduurilor prezintă mare importanţă deoarece reduce calculul unor integrale la calculul unor reziduuri, care de cele mai multe ori nu prezintă dificultăţi.

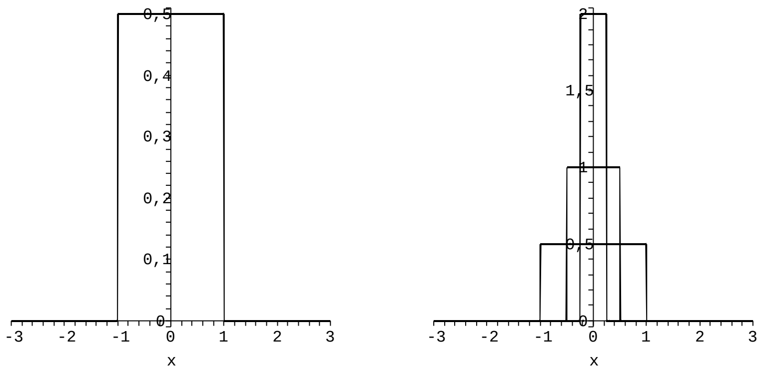
3. În cazul când numărul punctelor singulare izolate ale funcţiei este foarte mare, aplicarea teoremei reziduurilor poate conduce la calcule laborioase. În această situaţie se poate calcula reziduul funcţiei în punctul ∞ .

Corolarul 1.3.2. *Dacă f are în tot planul complex numai un număr finit de puncte singulare izolate, atunci suma tuturor reziduurilor acestei funcţii este nulă*

$$\mathrm{Rez}\ (f,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}\ (f,a_k)=0 \tag{1.37}$$

1.4 Distribuţii

Încercarea de a defini concepte ideale cum ar fi: impulsul unitar, densitatea unei sarcini etc. conduce la o noţiune care generalizează conceptul de funcţie. Să considerăm un exemplu şi anume impulsul ideal unitar.



$\varepsilon = 1$ $\qquad$ $\varepsilon = 1,\ 0.5,\ 0.2$

Figura 1.3: Impulsul unitar

Impulsul unitar la momentul $t = 0$ este definit prin

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & t \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \\ 0 & t \notin [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

Observăm că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(t)\ \mathrm{d}t = 1.$$

Ne punem problema să definim impulsul concentrat în $t = 0$, luând ε cât mai mic, adică trecem la limită pentru $\varepsilon \to 0$ şi obţinem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0. \end{cases}$$

Valoarea limitei precedente a fost notată cu $\delta(t)$ şi considerată pentru prima dată de către Dirac, in "Principiile mecanicii cuantice", în 1930. Acest calcul reflectă faptul că nu putem măsura impulsul într-un punct, ci doar "impulsurile medii" în vecinătatea punctului considerat. Bazele matematice au fost puse ulterior de către Sobolev şi Schwarz.

Spaţiul funcţiilor test

Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie; definim *suportul* prin închiderea mulţimii pentru care φ nu se anulează, adica

$$supp\ \varphi = \overline{\{t \in \mathbb{R} | \varphi(t) \neq 0\}}.$$

Se poate demonstra că suportul este complementara celei mai mari mulţimi deschise pe care φ se anulează.

Aplicaţia 1.4.1. Să determinăm suportul pentru următoarele funcţii:

1. h_ε

2. $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Observăm că cea mai mare mulţime închisă în afara căreia h_ε se anulează este $[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Analog, suportul funcţiei unitate, sau a lui Heaviside este $[0, +\infty)$.

Dacă funcţia φ admite derivate de orice ordin, vom spune că este indefinit derivabilă şi vom nota $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Introducem următoarea clasă de funcţii

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid supp\ \varphi \text{ mărginit}\}.$$

Prin definiţie suportul este o mulţime închisă, deci mărginirea suportului este echivalentă cu faptul că suportul este o mulţime compactă şi clasa $\mathcal{D}$ se mai numeşte clasa funcţiilor indefinit derivabile cu suport compact.

Elementele din $\mathcal{D}$ se numesc *funcţii test.* Se constată uşor că $\mathcal{D}$ este spaţiu vectorial peste corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$; într-adevăr dacă $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ şi $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci $\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ iar $supp\ \alpha\ \varphi = supp\ \varphi$, iar $supp\ (\ \varphi_1 + \varphi_2) \subset supp\ \varphi_1 \cup supp\ \varphi_2$.

Funcţiile h_ε, considerate anterior, au suport mărginit, dar nu sunt nici măcar continue pe $\mathbb{R}$. Funcţia $e^t,\ t \in \mathbb{R}$ satisface condiţia de a fi din $C^\infty(\mathbb{R})$, dar are suportul toată mulţimea reală $\mathbb{R}$. Să dăm un exemplu remarcabil de funcţie test.

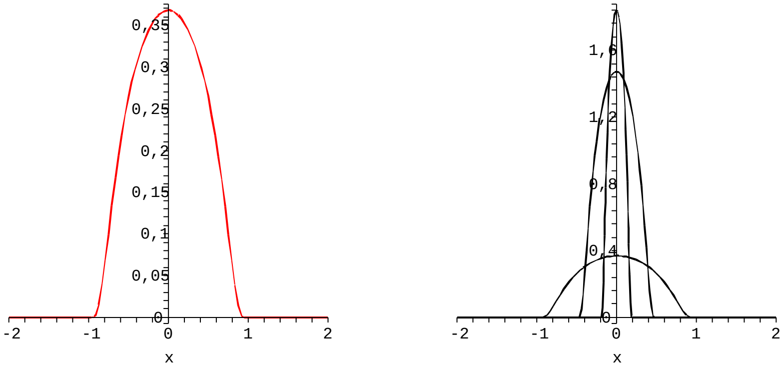
Exemplul 1.4.1. Funcţia definită prin

$$\omega_\varepsilon(t) = \begin{cases} c_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon^2}{t^2-\varepsilon^2}}, & |t| < \varepsilon \\ 0, & |t| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

unde $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ este astfel ales încât

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

este funcţie test şi este cunoscută sub numele de *scufiţă*.



$\varepsilon = 1$ $\quad\quad$ $\varepsilon = 1,\ 0.5,\ 0.2$

Figura 1.4:

Vom arăta că ω_1 este o funcţie din $C^\infty(\mathbb{R})$. În acest caz funcţia devine

$$\omega_1(t) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{t^2-1}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

Se poate vedea uşor faptul că $\lim\limits_{t\to\pm 1} \omega_1 = 0$. Deci funcţia este continuă. Pentru a stabili derivabilitatea în 1, este suficient, din corolarul lui Lagrange, să calculăm $\lim\limits_{t\nearrow 1} \omega_1'(t)$. La stânga lui 1 derivata este $\omega_1'(t) = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2} e^{\frac{1}{t^2-1}}$. Este suficient să calculăm $\lim\limits_{t\nearrow 1} \dfrac{1}{(t-1)^2} e^{\frac{1}{t-1}}$. Facem schimbarea $y = \frac{1}{t-1}$ şi constatăm că atunci când $t \nearrow 1$, $y \searrow -\infty$ şi limita revine deci la $\lim\limits_{y\searrow -\infty} y^2 e^y$. Aplicând de două ori regula lui l'Hospital deducem că această limită este 0, deci $\omega_1'(0) = 0$. Analog în $t = -1$. Deci ω_1 este derivabilă. Analog se arată că derivata este continuă; apoi un raţionament prin inducţie arată că ω_1 este o funcţie din $C^\infty(\mathbb{R})$.

Următoarea lemă indică un procedeu general de a construi funcţii test cu suportul pe un deschis oarecare.

Lema 1.4.1. *Pentru orice interval* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *şi* $\varepsilon > 0$ *există* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, *cu următoarele proprietăţi:*

1. $0 \leqslant \eta \leqslant 1$
2. $\eta(t) = 1$ *pentru* $t \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$
3. $\eta(t) = 0$, *pentru* $t \notin (a - 3\varepsilon, b + 3\varepsilon)$.

Convergenţa în $\mathcal{D}$

Pe mulţimea $\mathcal{D}$ introducem definim convergenţa şirurilor.

Definiţia 1.4.1. *Fie* $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N}$, şirul φ_n converge în $\mathcal{D}$ la φ *şi notăm*

$$\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \varphi$$

dacă există $A > 0$*, astfel ca supp* φ_n*, supp* $\varphi \subset [-A, A]$*) şi*

$$\varphi_n^{(k)} \overset{uniform}{\longrightarrow} \varphi^{(k)}$$

$\forall k \in N,\ n \to +\infty$ *(convergenţa este uniformă). Vom mai nota* $\varphi_n \to \varphi$ *în* $\mathcal{D}$*.*

Indicăm câteva operaţii cu funcţii test, care au ca rezultat tot funcţii test. Dacă f este o funcţie oarecare de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ şi φ o funcţie test, atunci prin înmulţrea lor, se obţine tot o funcţie test. Dacă φ, funcţie test este compusă cu $at + b$, rezultatul este tot o funcţie test. De asemenea, dacă derivăm o funcţie test, rezultatul este tot o funcţie test.

Se poate demonstra că operaţiile anterioare sunt continue; să arătăm în cazul derivării. Dacă $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{D}$, să arătăm că $\varphi_n^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ în $\mathcal{D}$. Este suficient să observăm că suporturile derivatelor de ordinul m rămân în acelaşi mulţime şi că

$$(\varphi_n^{(m)})^{(k)} = \varphi_n^{(m+k)} \to \varphi^{(m+k)},\ \text{uniform } n \to \infty.$$

Noţiunea de distribuţie

Definiţia 1.4.2. *Funcţionala* $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *se numeşte* distribuţie *dacă*

1. T *este liniară, adică* $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

2. T *este continuă (prin şiruri), adică* $\forall \varphi_n \in \mathcal{D},\ \varphi_n \to \varphi$ *în* $\mathcal{D}$ *rezultă*

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi).$$

Convergenţa precedentă are loc în spaţiul numerelor complexe $\mathbb{C}$, cu topologia uzuală. Notăm cu $\mathcal{D}'$, mulţimea tuturor distribuţiilor, care se mai numeşte dualul lui $\mathcal{D}$. Vom folosi diferite notaţii

$$T(\varphi) = (T, \varphi) = (T(t), \varphi(t))$$

ultima pentru a indica explicit variabila independentă a funcţiei test; nu se poate defini valoarea unei distribuţii într-un punct, totuşi vom folosi notaţia pentru a pune în evidenţă asupra cărei variabile se aplică distribuţia.

Definiţia 1.4.3. *Şirul* $T_n \in \mathcal{D}'$ converge slab *la* $T \in \mathcal{D}'$ *dacă pentru orice* $\varphi \in \mathcal{D}$*, are loc:*

$$(T_n, \varphi) \to (T, \varphi).$$

Se poate demonstra că $\mathcal{D}'$ este complet relativ la convergenţa slabă.

Teorema 1.4.1. *Dacă* T_n *este un şir din* $\mathcal{D}'$ *cu proprietatea că pentru orice* $\varphi \in \mathcal{D}$ *şirul numeric* (T_n, φ) *este convergent, atunci funcţionala* T *definită prin:*

$$(T, \varphi) = \lim_{n \to +\infty} (T_n, \varphi)$$

este din $\mathcal{D}'$.

Definiţia 1.4.4. *Dacă* $T_n \in \mathcal{D}'$, $n \in \mathbb{N}$ *atunci spunem că seria* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n$ *este* slab convergentă *la* T *în* $\mathcal{D}'$*, dacă şirul sumelor parţiale* $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ *este slab convergent la* T *şi notăm*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = T.$$

Exemple de distribuţii

Distribuţii de tip funcţie (regulate) Pentru o funcţie local integrabilă f, definim distribuţia generată prin formula:

$$T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}, \ (T_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) \ \mathrm{d}t, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.38}$$

Observăm că integrala este bine definită, deoarece f fiind local integrabilă, integrala din membrul al doilea este pe un interval compact, dat de suportul funcţiei test. Să arătăm că formula (1.38) defineşte o distribuţie. Mai întâi liniaritatea.

$$(T_f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)) \ \mathrm{d}t =$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_1(t) \ \mathrm{d}t + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_2(t) \ \mathrm{d}t = \alpha_1(T_f, \varphi_1) + \alpha_2(T_f, \varphi_2).$$

Apoi, dacă $\varphi_n \to \varphi$, în $\mathcal{D}$, atunci prin trecere la limită sub semnul integralei, (situaţie posibilă datorită convergenţei uniforme), rezultă:

$$(T_f, \varphi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t) \ \mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) \ \mathrm{d}t = (T_f, \varphi).$$

Dacă de exemplu $f = u$, funcţia unitate, obţinem *distribuţia Heaviside*:

$$(T_u, \varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t, \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.39}$$

Următoarea lemă arată că între distribuţiile regulate şi clasele de funcţii local integrabile se poate stabili o corespondenţă biunivocă.

Lema 1.4.2 (**du Bois-Raymond**). *Fie f o funcţie local integrabilă pe $\mathbb{R}$. Atunci $T_f = 0$ dacă şi numai dacă $f = 0$ aproape peste tot.*

Pe baza acestei leme putem considera că funcţiile local integrabile sunt cazuri particulare de distribuţii, ceea ce justifică denumirea de *funcţii generalizate.*

Observaţia 1.4.1. Dacă aplicăm această lemă, observăm că modificând valorile unei funcţii într-o mulţime cel mult numărabilă, se obţine aceeaşi distribuţie generată.

De exemplu să alegem funcţiile

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{şi } u_1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \dfrac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

atunci ele generează aceeeşi distribuţie şi anume Heaviside, adică $T_u = T_{u_1}$.

Distribuţii singulare.

O distribuţie este *singulară* dacă nu există nici o funcţie local integrabilă care să o genereze în sensul formulei (1.38). Definim *distribuţiile Dirac* prin:

$$\delta : \mathcal{D} \to C \qquad (\delta, \varphi) = \varphi(0),\ \forall \varphi \in \mathcal{D} \tag{1.40}$$

$$\delta_a : \mathcal{D} \to C \qquad (\delta_a, \varphi) = \varphi(a), \quad a \in R,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.41}$$

Se poate arăta că formulele precedente definesc distribuţii şi faptul că distribuţia Dirac este singulară. Să dăm câteva aplicaţii legate de distribuţia Dirac.

Aplicaţia 1.4.2. Şirul distribuţiilor generate de $h_{\frac{1}{n}}$ converge slab la distribuţia Dirac δ. Să arătăm că

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} h_{\frac{1}{n}} \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(0)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. Din continuitatea funcţiei test, pentru orice $\eta > 0$, există ε_0 astfel ca dacă $|t| < \varepsilon_0$, rezultă $|\varphi(t) - \varphi(o)| < \eta$. Avem atunci

$$| \int_{\mathbb{R}} h_{\frac{1}{n}}(t)\varphi(t)\ \mathrm{d}t - \varphi(0)| = | \int_{\mathbb{R}} h_{\frac{1}{n}}(t)(\varphi(t) - \varphi(0))\ \mathrm{d}t| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} h_{\frac{1}{n}}(t)|\varphi(t) - \varphi(0)|\ \mathrm{d}t < \eta \int_{\mathbb{R}} h_{\frac{1}{n}}(t)\ \mathrm{d}t = \eta,$$

de unde rezultă afirmaţia.

Aplicaţia 1.4.3. Seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \delta_n$ este convergentă slab.

E suficient să remarcăm că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$, suma $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\delta_n, \varphi)$ este o sumă finită.

O distribuţie poate fi generată de funcţii care nu sunt local integrabile, astfel se obţin *distribuţii valori principale.*

Exemplul 1.4.2. Funcţionala notată $Vp\,\dfrac{1}{t}$ şi definită prin:

$$(Vp\frac{1}{t}, \varphi) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t \right) \qquad (1.42)$$

este o distribuţie.

Funcţia $\dfrac{1}{t}$ nu este integrabilă pe nici un interval care conţine originea. Să demonstrăm că formula (1.42) defineşte o distribuţie. Pentru aceasta arătăm mai întâi că există limita din membrul al doilea. Deoarece φ este nulă în afara unui interval $[-A, A]$ şi

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{-\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t \right) = 0$$

limita din definiţie (1.42) există simultan cu următoarea

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\ \mathrm{d}t \right).$$

Ultima integrală există deoarece

$$|\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}| \leqslant \sup_{t \in [A,A]} |\varphi'(t)| < +\infty.$$

Evident corespondenţa $\varphi \to (Vp\frac{1}{t}, \varphi)$ este liniară. Să mai arătăm că este şi continuă prin şiruri. Fie $\varphi_n \to 0$ în $\mathcal{D}$; atunci există $r > 0$, astfel ca $supp\varphi_n \subset [-r, r]$, $\forall n \geqslant 1$. Ca mai înainte

$$(Vp\frac{1}{t}, \varphi_n) = vp\int_{-r}^{r} \frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Dar

$$\left|\frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t}\right| \leqslant \sup_{t\in[-r,r]} |\varphi_n'(t)| \to 0 \text{ pentru } n \to +\infty.$$

Deci $|(Vp\frac{1}{t}, \varphi_n)| \to 0$, dacă $n \to 0$.

Alte consecinţe ale convergenţei slabe sunt date de formulele din exemplul următor.

Aplicaţia 1.4.4. Au loc următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t + \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}t &= -\mathrm{i}\pi\varphi(0) + Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t \\
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t - \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}t &= \mathrm{i}\pi\varphi(0) + Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

numite *formulele lui Sohotski*.

Demonstrăm prima egalitate. Dacă $\varphi = 0$ pentru $|x| > A$, atunci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t + \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A} \frac{t - \mathrm{i}\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}\varphi(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A} \frac{t - \mathrm{i}\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}\ \mathrm{d}t + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-A}^{A} \frac{(t - \mathrm{i}\varepsilon)(\varphi(t) - \varphi(0))}{t^2 + \varepsilon^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= -2\mathrm{i}\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} + \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= -\mathrm{i}\pi\varphi(0) + Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Relaţia de mai sus exprimă convergenţa în $\mathcal{D}'$ a şirului $\dfrac{1}{t + \mathrm{i}\varepsilon}$, dacă $\varepsilon \to 0$; notăm valoarea limitei cu $\dfrac{1}{t + \mathrm{i}0}$. Analog se obţine şi cea de a doua relaţie.

Suportul unei distribuţii

Deşi după cum am precizat, nu se poate vorbi despre valoarea unei distribuţii într-un punct, se poate defini faptul că o distribuţie se anulează pe o mulţime deschisă.

Definiţia 1.4.5. *Fie $T \in \mathcal{D}'$; spunem că T* se anulează pe mulţimea deschisă *$D \subset \mathbb{R}$, dacă $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, cu supp $\varphi \subset D$, are loc $(T, \varphi) = 0$.*

Definiţia 1.4.6. *Fie $T \in \mathcal{D}'$; numim* suportul distribuţiei T *complementara celei mai mari mulţimi deschise pe care T se anulează. Notăm suportul cu supp T.*

Aplicaţia 1.4.5. Să determinăm suportul distribuţiilor Dirac şi Heaviside.

1 *supp* $\delta_a = a$, deoarece δ_a se anulează pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

2. *supp* $T_u = [0, +\infty)$, unde reamintim că T_u este distribuţia Heaviside.

Distribuţii cu suport compact

Dacă notăm cu
$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$$
definim următoarea convergenţă a şirurilor: $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{E}$, dacă $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$, uniform pe orice compact $K \subset \mathbb{R}$.

Notăm cu $\mathcal{E}'$ mulţimea tuturor funcţionalelor $T : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$, liniare şi continue, relativ la convergenţa de mai sus. Se poate demonstra că mulţimea distribuţiilor cu suport compact coincide cu $\mathcal{E}'$.

Operaţii cu distribuţii

Definiţia 1.4.7. *Dacă $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$, definim* suma $T_1 + T_2$, *ca distribuţia dată de:*
$$(T_1 + T_2, \varphi) = (T_1, \varphi) + (T_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in D. \tag{1.44}$$
Dacă $\lambda \in \mathbb{C}, T \in \mathcal{D}'$, definim înmulţirea cu scalar *prin:*
$$(\lambda T, \varphi) = \lambda (T, \varphi). \tag{1.45}$$
Dacă $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi $T \in \mathcal{D}'$ definim înmulţirea cu funcţii indefinit derivabile *prin:*
$$(f\ T, \varphi) = (T, f\ \varphi). \tag{1.46}$$

Se poate demonstra că prin formulele precedente sunt definite de fiecare dată distribuţii, dar lăsăm demonstraţia pe seama cititorului.

Definiţia 1.4.8. *Dacă $T \in \mathcal{D}'$, iar $u = at + b$, $a \neq 0$, formula:*
$$(T(at + b), \varphi(t)) = \frac{1}{|a|}(T(u), \varphi\left(\frac{u - b}{a}\right)) \tag{1.47}$$
se numşte distribuţia obţinută prin schimbarea variabilei.

Se poate arăta că $T(at+b)$ este o distribuţie. Dacă $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, atunci formula (1.47) reprezintă schimbarea de variabilă într-o integrală.

Aplicaţia 1.4.6. Să demonstrăm că distribuţia Dirac are proprietăţile:

$$(\delta(at+b), \varphi(t)) = \frac{1}{|a|}\varphi(-\frac{b}{a}) \tag{1.48}$$

$$(\delta(at), \varphi(t)) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}(\delta, \varphi) \tag{1.49}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{1.50}$$

$$\delta(t-a) = \delta_a. \tag{1.51}$$

Dacă aplicăm formula (1.47) pentru δ obţinem (1.48). Pentru $b = 0, a \neq 0$ avem (1.49). Din egalitatea precedentă deducem ”paritatea” distribuţiei Dirac, adică (1.50). Dacă $a = 1, b = a$, atunci

$$(\delta(t-a), \varphi(t)) = (\delta(u), \varphi(u+a)) = \varphi(a) = (\delta_a, \varphi),$$

de unde se obţine (1.51).

1.4.1 Derivarea distribuţiilor

Definiţia 1.4.9. *Dacă $T \in \mathcal{D}'$, atunci definim* derivata *sa de ordin $n \in \mathbb{N}$ este definită prin:*

$$(T^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (T, \varphi^{(n)}) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.52}$$

Fie $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ şi presupunem că derivata există şi este tot din $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Are loc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = f(t)\varphi(t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Deoarece φ se anulează în afara unui compact, din formula precedentă rezultă

$$(T_{f'}, \varphi) = -(T_f, \varphi').$$

Deci în acest caz derivata distribuţiei generate de f coincide cu distribuţia generată de derivata lui f.

Aplicaţia 1.4.7. Să calculăm derivatele distribuţiei Dirac şi derivata distribuţiei Heaviside.

Pentru Dirac, folosind definiţia avem:

$$(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Derivata distribuţiei Heaviside este $T_u' = \delta$. Într-adevăr

$$(T_u', \varphi) = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Vom da în continuare câteva formule de derivare de mare utilitate practică.

Teorema 1.4.2. *Dacă f admite derivata de ordin n din $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ şi derivatele $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ au în $t = 0$ punct de discontinuitate de prima speţă atunci:*

$$T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}} + \sigma_{n-1}\delta + \cdots + \sigma_0\delta^{(n-1)} \tag{1.53}$$

unde $\sigma_k = f^{(k)}(0+0) - f^{(k)}(0-0)$ este saltul derivatei de ordin k în $t = 0$.

Demonstraţie. Să demonstrăm afirmaţia pentru $n = 1$, adică

$$T_f' = T_{f'} + \sigma_0\delta.$$

Avem

$$(T_f', \varphi) = -(T_f, \varphi') = -\int_0^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= f(t)\varphi(t)|_{-\infty}^0 - f(t)\varphi(t)|_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt = (T_{f'}, \varphi) + \sigma_0(\delta, \varphi).$$

Demonstraţia completă presupune raţionament prin inducţie, dar trecerea de la n la $n+1$ se face asemănător cu situaţia de mai sus şi o lasăm în seama cititorului. ■

Aplicaţia 1.4.8. Să calculăm derivatele funcţiei $f(t) = u(t)\cos t$.

Calculăm primele derivate, observând pentru început că în $t = 0$, funcţia nu este derivabilă. Avem

$$\begin{array}{ll} f'(t) = -u(t)\sin t & \sigma_1 = 0 \\ f''(t) = u(t)\cos t & \sigma_2 = -1 \\ f'''(t) = u(t)\sin t & \sigma_3 = 0. \end{array}$$

Urmează

$$T_f^{(n)} = T_{u(t)\cos^{(n)} t} + \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \sigma_{2(k-1)}\delta^{n-(2k-1)}$$

unde $\sigma_{2(k-1)} = (-1)^{k-1}$.

Generalizare. În ipotezele precedente, dacă punctul de discontinuitate este $t = a$, atunci saltul funcţiilor se ia în $t = a$, iar distribuţiile se înlocuiesc cu δ_a.

$$T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}} + \sigma_{n-1}\delta_a + \cdots + \sigma_0\delta_a^{(n-1)} \tag{1.54}$$

unde $\sigma_k = f^{(k)}(a+0) - f^{(k)}(a-0)$.

Teorema 1.4.3. *Dacă $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi $T \in \mathcal{D}'$, atunci are loc:*

$$(f\ T)^{(n)} = f^{(n)}T + C_n^1 f^{(n-1)}T' + \cdots + f\ T^{(n)}. \tag{1.55}$$

Demonstraţie. Formula poate fi demonstrată prin inducţie; noi vom arăta doar cazul $n = 1$.

$$((f\ T)', \varphi) = -(f\ T, \varphi') = -(T, f\varphi') = -(T, (f\varphi)' - f'\varphi) =$$

$$= (T', f\varphi) + (T, f'\varphi) = (f\ T', \varphi) + (f'\ T, \varphi).$$

În egalităţile precedente s-au folosit formulele de derivare a distribuţiilor şi produsul unei distribuţii cu o funcţie de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$. ■

Teorema 1.4.4. *Dacă f, funcţie local integrabilă are pe orice interval mărginit un număr finit de puncte t_k de discontinuitate de prima speţă, iar f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{t_k\}$, atunci are loc*

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f(t_k + 0) - f(t_k - 0))\delta_{t_k}. \tag{1.56}$$

Demonstraţia este imediată, dacă folosim prima teoremă de derivare.

Aplicaţia 1.4.9. Să determinăm derivata distribuţiei generate de prelungirea prin periodicitate a funcţiei $f : [-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(t) = t$ pe $\mathbb{R}$.

Prelungim prin periodicitate funcţia $f : [-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(t) = t$ pe $\mathbb{R}$; atunci ea generează o distribuţie a cărei derivată după formula precedentă este

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k \in Z} (f((2k-1) + 0) - f((2k-1) - 0)))\delta_{2k-1}$$

şi cum $f' = 0$ pe $\mathbb{R} \setminus \{2k - 1\}$, avem

$$T_f' = -2 \sum_{k \in Z} \delta_{2k-1}.$$

Aplicaţia 1.4.10. [**formula lui Poisson de însumare**] Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ are loc:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{\mathrm{i}n2\pi\omega}\ \mathrm{d}\omega. \tag{1.57}$$

Fie $h : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin:

$$h(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi}.$$

Ea admite dezvoltare în serie Fourier sub forma complexă

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-int}\ \mathrm{d}t.$$

Dacă efectuăm calculele, obţinem

$$h(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}e^{int}.$$

Seria din membrul al doilea poate fi derivată în sensul teoriei distribuţiilor, deoarece, din $\left|\dfrac{e^{int}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, rezultă uniform convergentă. Vom deriva această serie de două ori; folosind formula (1.56) şi faptul că prelungirea prin periodicitate a lui h este continuă, iar prelungirea prin periodicitate a lui $h' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2\pi}$, $t \in (0, 2\pi)$ este discontinuă pe $\mathbb{R} \setminus \{2n\pi\}$ are loc

$$T_h'' = -\frac{1}{2\pi}T_1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2n\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}).$$

Egalând această serie cu derivata de două ori a seriei anterioare, avem

$$-\frac{1}{2\pi}T_1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} T_{e^{int}}.$$

Alegem $t = \dfrac{2\pi\omega}{\omega_0}$ şi folosim asemănarea (1.50) şi (1.51) distribuţiei Dirac, avem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{e^{\mathrm{i}\, n\frac{2\pi\omega}{\omega_0}}}.$$

Dacă particularizăm $\omega_0 = 1$, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$ are loc formula căutată.

1.4.2 Convoluţia distribuţiilor

Dacă $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ admit produs de convoluţie din $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, atunci acesta generează o distribuţie şi anume

$$(T_f \star T_g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(t)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\ \mathrm{d}s\varphi(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\ \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)\varphi(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\ \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\varphi(s+u)\ \mathrm{d}u.$$

Dacă $\varphi(s+t)$ ar aparţine lui $\mathcal{D}$ (ceea ce în general nu se întâmplă), ţinând cont de definiţia distribuţiei de tip funcţie, ultimul membru poate fi scris formal $(T_f(s), (T_g(u), \varphi(s+u))$, dar în general acest lucru nu este corect definit. Construcţia ce urmează repară acest neajuns, introducând o altă operaţie cu distribuţii şi anume produsul direct. Cu ajutorul acesteia definim ulterior produsul de convoluţie al distribuţiilor.

Produsul direct al distribuţiilor

Vom considera clasa funcţiilor test pe $\mathbb{R}^2$, adică

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \mathit{supp}\ \varphi \text{ compact}\}.$$

Fie două distribuţii (de o variabilă), definite pe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ definim funcţionala

$$(S(s) \cdot T(t), \varphi(s,t)) = (S(s), (T(t), \varphi(s,t))). \tag{1.58}$$

Arătăm că această relaţie defineşte o distribuţie, care se va numi *produsul direct al distribuţiilor S, T*. Menţionăm o lemă, care constituie un instrument tehnic util.

Lema 1.4.3. *Fie $T \in \mathcal{D}'$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ atunci funcţia*

$$\psi(s) = (T(t), \varphi(s,t))$$

este din $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi

$$\psi^{(n)}(s) = (T(t), \frac{\partial^n}{\partial s^n}\varphi(s,t)). \tag{1.59}$$

Revenind la definiţia produsului direct, constatăm că funcţionala definită de (1.58) este liniară, datorită faptului că S, T sunt liniare. Să demonstrăm că funcţionala este şi continuă. Fie $\varphi_k \to \varphi,\ k \to +\infty$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Din lema precedentă, rezultă

$$(T(t), \varphi_k(s,t)) \to (T(t), \varphi(s,t)),\ k \to +\infty$$

în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, iar din continuitatea lui S pe $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$(S(s), (T(t), \varphi_k(s,t))) \to (S(s), (T(t), \varphi_k(s,t))).$$

Astfel relaţia (1.58) defineşte o distribuţie.

Teorema 1.4.5 (**comutativitatea produsului direct**). *Fie $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ are loc*

$$S(s) \cdot T(t) = T(t) \cdot S(s).$$

Teorema 1.4.6 (**derivarea produsului direct**). *Dacă S, T sunt două distribuţii, atunci are loc*

$$\frac{d}{ds}(S(s) \cdot T(t)) = S'(s) \cdot T(t). \tag{1.60}$$

Produsul de convoluţie al distribuţiilor

Dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, funcţia $\varphi(s+t)$ nu este o funcţie test, neavând suportul compact. Pentru a corecta acest fapt, o vom înmulţi cu funcţii care au suport compact, iar produsul de convoluţie poate fi acum definit.

Definiţia 1.4.10. Şirul $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tinde la 1 în $\mathbb{R}^2$, *dacă*

a. pentru orice compact $K \subset \mathbb{R}^2$ există n_0, astfel ca $\eta_k(s,t) = 1$ pentru $(s,t) \in K$ şi $k \geqslant n_0$

b. funcţiile η_k şi toate derivatele lor parţiale sunt uniform mărginite pe $\mathbb{R}^2$, adică pentru orice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ există c_α astfel ca

$$|D^\alpha \eta_k(s,t)| = \left| \frac{\partial^{|\alpha_1+\alpha_2|} \eta_k(s,t)}{\partial^{\alpha_1} s \partial^{\alpha_2} t} \right| \leqslant c_\alpha, \; k = 1, 2, \ldots$$

Definiţia 1.4.11. *Fie $S, T \in \mathcal{D}'$ astfel ca pentru orice $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ care tinde la 1 în R^2, există limita şirului numeric*

$$\lim_{k \to +\infty} (S(s) \cdot T(t), \eta_k(s,t)\varphi(s+t)), \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.61}$$

Valoarea acestei limite o numim produs de convoluţie *şi o notăm $(S \star T, \varphi)$.*

Relaţia precedentă defineşte o funcţională; să demonstrăm că este o distribuţie. Fie $\varphi_n \to \varphi, \; n \to \infty$ în $\mathcal{D}$, atunci:

$$\eta_k(s,t)\varphi_n(s+t) \to \eta_k(s,t)\varphi(s+t).$$

Deoarece produsul direct $S \cdot T$ este o funcţională continuă, obţinem:

$$(S(s) \cdot T(t), \eta_k(s,t)\varphi_n(s+t)) \to (S(s) \cdot T(t), \eta_k(s,t)\varphi(s+t))$$

deci funcţionala definită de (1.61) este continuă. Vom analiza în continuare câteva situaţii în care există produsul de convoluţie.

Teorema 1.4.7. *Fie $T \in \mathcal{D}'$, atunci există $T \star \delta$ şi $\delta \star T$ şi are loc:*

$$T \star \delta = \delta \star T = T.$$

Demonstraţie. Fie $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi η_k un şir de funcţii din $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ care tinde la 1 în $\mathbb{R}^2$. Atunci $\eta_k(s,0)\varphi(s) \to \varphi(s),\ k \to \infty$ în $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ şi

$$\lim_{k\to\infty}(T(s) \cdot \delta(t), \eta_k(s,t)\varphi(s+t)) = \lim_{k\to}(T(s), \eta_k(s,0)\varphi(s)) = (T(s), \varphi(s))$$

deci există $T \star \delta = T$. Din comutativitatea produsului direct rezultă şi $\delta \star T = T$. ■

Mai general se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 1.4.8. *Dacă $T, S \in \mathcal{D}'$ şi T are suport compact, atunci convoluţia $T \star S$ există şi este*

$$(S \star T, \varphi) = (S(s) \cdot T(t), \eta(t)\varphi(s+t)),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

unde $\eta \in \mathcal{D}$ şi este 1 într-o vecinătate a lui supp T.

Demonstraţie. Presupunem *supp* $S \subset \{t|\ |t| < A\}$ şi $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \eta = 1$ pe o vecinătate a suportului lui S, iar *supp* $\eta \subset S(0, A)$. Fie $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ cu *supp*$\varphi \subset S(0, A_1)$ şi $\eta_k(s,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ un şir care tinde la 1 în $\mathbb{R}^2$. Pentru n suficient de mare

$$\eta(t)\eta_k(s,t)\varphi(s+t) = \eta(t)\varphi(s+t).$$

Egalitatea precedentă decurge din faptul că $\eta(t)\varphi(s+t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Într-adevar $\eta\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, iar

$$\textit{supp}\ \eta(t)\varphi(s+t) \subset \{(s,t)|\ |s+t| \leqslant A_1,\ |t| < A\}$$

iar această mulţime este mărginită. Deoarece $T = \eta T$ rezultă,

$$(S \star T, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(S(s) \cdot T(t), \eta_k(s,t)\varphi(s+t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(S(s) \cdot \eta(t)T(t), \eta(t)\eta_k(s,t)\varphi(s+t)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(S(s) \cdot T(t)\eta_k(s,t)\varphi(s+t)) =$$

$$= (S(s) \cdot T(t), \eta(t)\varphi(s+t)),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

■

Se mai pot dovedi afirmaţiile următoare:

1. Dacă $T_n \to T$ în $\mathcal{D}'$ atunci $T_n \star S \to T \star S$.

2. Dacă $S_n \to S$ în $\mathcal{D}'$ şi S_n, S au suporturile închise într-o mulţime mărginită, atunci $T \star S_n \to R \star S$.

Aplicaţia 1.4.11. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc:

$$\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}.$$

Într-adevăr, din teorema precedentă pentru o funcţie η egală cu 1 pe o vecinătate a lui $\{b\}$, are loc

$$(\delta_a \star \delta_b, \varphi) = (\delta_a(s) \cdot \varphi(b), \eta\varphi(s+t)) =$$

$$(\delta_a(s), (\delta_b(t), \eta\varphi(s+t)) = (\delta_a(s), \varphi(s+b)) = \varphi(a+b) = (\delta_{a+b}, \varphi).$$

Dăm în continuare câteva proprietăţi ale convoluţiei, dacă această operaţie este definită.

Teorema 1.4.9 (liniaritatea produsului de convoluţie). *Dacă $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{D}'$ astfel ca $T_1 \star T_3, T_2 \star T_3$ să fie definite, atunci pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ are loc*

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) \star T_3 = \lambda_1 T_1 \star T_3 + \lambda_2 T_2 \star T_3.$$

Observaţia 1.4.2. În general convoluţia nu este o operaţie continuă de la $\mathcal{D}'$ la $\mathcal{D}'$, după cum rezultă din exemplul următor.

$$\delta(t-k) \to 0, \ k \to \infty$$

în $\mathcal{D}'$, deoarece $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ are loc $(\delta(t-k), \varphi) = \varphi(k) \to 0, \ k \to \infty$; pe de altă parte

$$1 \star \delta(t-k) = 1,$$

care nu tinde la 0.

Din comutativitatea produsului direct, rezultă comutativitatea convoluţiei, după cum se afirmă mai jos.

Teorema 1.4.10 (comutativitatea produsului de convoluţie). *Dacă există $T \star S$, atunci există şi $S \star T$ şi sunt egale.*

Teorema 1.4.11 (derivarea produsului de convoluţie)). *Dacă există $T \star S$, atunci există $T^{(n)} \star S$ şi $T \star S^{(n)}$ şi are loc:*

$$(S \star T)^{(n)} = S^{(n)} \star T = S \star T^{(n)}$$

Corolarul 1.4.1. *Dacă* $T \in \mathcal{D}'$*, atunci are loc*

$$T^{(n)} = \delta \star T^{(n)} = \delta^{(n)} \star T. \tag{1.62}$$

Observaţia 1.4.3. Din existenţa convoluţiilor $T^{(n)} \star S,\ T \star S^{(n)}$, nu rezultă existenţa convoluţiei $T \star S$, după cum deducem din exemplul de mai jos.

$$T_u' \star T_1 = \delta \star T_1 = T_1$$

$$T_u \star T_1' = T_u \star 0 = 0.$$

Teorema 1.4.12 (translaţia convoluţiei). *Dacă există* $S \star T$*, atunci există şi* $S(s+h) \star T(s)$ *şi are loc:*

$$S(s+h) \star T(s) = S \star T(s+h),\ \forall h \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.4.13. *Dacă* $S, T \in \mathcal{D}'_+$ *atunci există* $S \star T$*, aparţine lui* $\mathcal{D}'_+$ *şi are loc*

$$(S \star T, \varphi) = (S(s) \cdot T(t), \eta_1(s)\eta_2(t)\varphi(s+t)),\ \varphi \in \mathcal{D},$$

unde $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ *şi sunt egale cu 1 într-o vecinătate a semiaxei* $[0, +\infty)$ *şi nule pentru* $t < 0$*, suficient de mare în valoare absolută.*

Observaţia 1.4.4. În general convoluţia distribuţiilor nu este o operaţie asociativă, după cum rezultă din exemplul umător.

Aplicaţia 1.4.12. Arătaţi că produsul de convoluţie al distribuţiilor T_u, δ' şi T_1 nu este asociativ.

Într-adevăr au loc:

$$(T_u \star \delta') \star T_1 = (T_u' \star \delta) \star T_1 = (\delta \star \delta) \star T_1 = T_1$$

$$T_u \star (\delta' \star T_1) = T_u \star (\delta \star T_1') = T_u \star (\delta \star T_0) = T_0.$$

Fie $\mathcal{D}'_+$ mulţimea distribuţiilor cu suportul în $[0, \infty)$. Se poate demonstra că în $\mathcal{D}'_+$ convoluţia este asociativă.

Teorema 1.4.14. *Convoluţia distribuţiilor din* $\mathcal{D}'_+$ *este o operaţie asociativă, adică*

$$T_1 \star (T_2 \star T_3) = (T_1 \star T_2) \star T_3.$$

Aplicaţia 1.4.13. Fie $S, T \in \mathcal{D}'_+$ două distribuţii cunoscute; să determinăm $U \in \mathcal{D}'_+$astfel ca

$$S \star U = T.$$

Dacă $T = \delta$, soluţia U dacă există o vom nota S^{-1} şi o vom numi *inversa distribuţiei* S. Dacă există inversa S^{-1}, atunci ecuaţia admite soluţie unică de forma

$$U = S^{-1} \star T.$$

Într-adevăr $S^{-1} \star T$ este soluţie, deoarece

$$S \star (S^{-1} \star T) = (S \star S^{-1}) \star T = \delta \star T = T.$$

Dacă ar exista două soluţii, U_1, U_2, atunci din $S \star U_1 = T, S \star U_2 = T$ rezultă $S \star (U_1 - U_2) = 0$, de unde $S^{-1} \star (S \star (U_1 - U_2)) = (S^{-1} \star S) \star (U_1 - U_2) = U_1 - U_2 = 0$ şi deci $U_1 = U_2$.

Capitolul 2

Transformarea Fourier

2.1 Transformarea Fourier

Definiţia 2.1.1. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o funcţie din* $L^1(\mathbb{R})$. *Funcţia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definită prin:*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \tag{2.1}$$

se numeşte transformata Fourier *a funcţiei* f.

Vom folosi notaţiile

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega).$$

iar uneori vom renunţa la argumentele celor două funcţii, dacă acest lucru nu este esenţial. Uneori transformata se mai notează $\widehat{f}(\omega)$. Să mai observăm că are loc

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}.$$

Din acest motiv este suficient să cunoaştem $F(\omega)$ pentru valori $\omega > 0$.

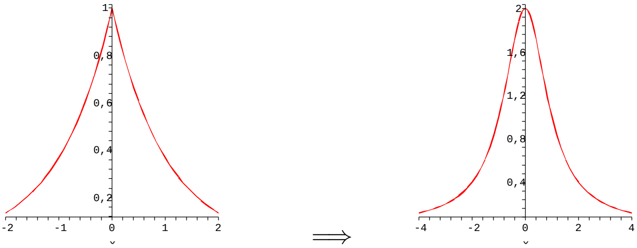
Definiţia 2.1.2. *Corespondenţa*

$$f(x) \Longrightarrow F(\omega)$$

se numeşte transformare Fourier.

Observaţia 2.1.1. Transformarea Fourier este liniară.

Interpretare fizică Dacă $(\tau, \leqslant)$ este o mulţime ordonată ale cărei elemente se numesc momente, o funcţie $f : \tau \to \mathbb{R}$ se numeşte *semnal*. Dacă $\tau \subset \mathbb{R}$, este un interval, semnalul este *continual*, iar dacă $\tau = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ se mai numeşte *discret*.



Semnalul $f(x) = e^{-|x|}$ $\Longrightarrow$ Spectrul în frecvenţă $F(\omega)$

Figura 2.1: Transformarea Fourier

$F(\omega)$ este numit *spectrul în frecvenţă* şi fiind cu valori complexe admite reprezentarea $F(\omega) = A(\omega)\ e^{\mathrm{i}\Phi(\omega)}$, unde $\Phi(\omega) = argF(\omega)$ reprezintă *faza* de frecvenţă, iar $A(\omega) = |F(\omega)|$ este *amplitudinea* în frecvenţă; putem spune că F listează amplitudinile $F(\omega)$ ale oscilaţiilor armonice $e^{\mathrm{i}\omega t}$.

Pe scurt unui semnal i se asociază transformata sa; dacă semnalul se transmite pe un canal de transmisie, fizic se citeşte de fapt spectrul său în frecvenţă şi problema este de a identifica semnalul corespunzător.

Teorema 2.1.1 (întarziere, deplasare, asemănare). *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este din $L^1(\mathbb{R})$ atunci:*

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\omega) = e^{-\mathrm{i}\omega a}\mathcal{F}[f(x)](\omega) \tag{2.2}$$

$$\mathcal{F}[e^{-\mathrm{i}ax} f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega + a) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{F}[f(a\ x)] = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\omega}{a}), \quad a \neq 0. \tag{2.4}$$

Demonstraţie. Pentru fiecare formulă vom folosi definiţia transformatei Fourier şi schimbări convenabile de variabilă. Prima relaţie rezultă astfel

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{\ \mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}\omega(a+y)}\ \mathrm{d}y =$$

$$= e^{-\mathrm{i}\omega a}\mathcal{F}[f(x)](\omega).$$

Pentru a doua formulă avem succesiv

$$\mathcal{F}[e^{-\mathrm{i}ax} f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}ax} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}(\omega+a)x}\ \mathrm{d}x = \mathcal{F}[f(x)](\omega + a).$$

Analog obţinem ultima formulă:

$$\mathcal{F}[f(a\ x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a\ x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\omega}{a}).$$

■

Aplicaţia 2.1.1. Să determinăm transformatele Fourier pentru următoarele funcţii:

1. funcţia unitate $u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

2. funcţia fereastră $f(x) = \begin{cases} A, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

1. $\mathcal{F}[u(x)](\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{i}\omega}\ \mathrm{d}x = -\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{\mathrm{i}\omega}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}.$

2. Observăm că are loc $f(x) = A\left(u(x+\frac{\pi}{2}) - u(x-\frac{\pi}{2})\right)$, iar dacă folosim Teorema 2.1.1 avem $\mathcal{F}[u(x+\frac{\pi}{2})](\omega) = e^{\frac{\mathrm{i}\omega\pi}{2}}\mathcal{F}[u(x)](\omega) = \frac{e^{\frac{\mathrm{i}\omega\pi}{2}}}{\mathrm{i}\omega}$. Analog $\mathcal{F}[u(x-\frac{\pi}{2})](\omega) = \frac{e^{-\frac{\mathrm{i}\omega\pi}{2}}}{\mathrm{i}\omega}$. Se obţine

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin(\frac{\omega\pi}{2}) = \pi A \cdot \mathrm{sa}(\frac{\omega\pi}{2})$$

unde $\mathrm{sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este funcţia denumită *sinus atenuat*.

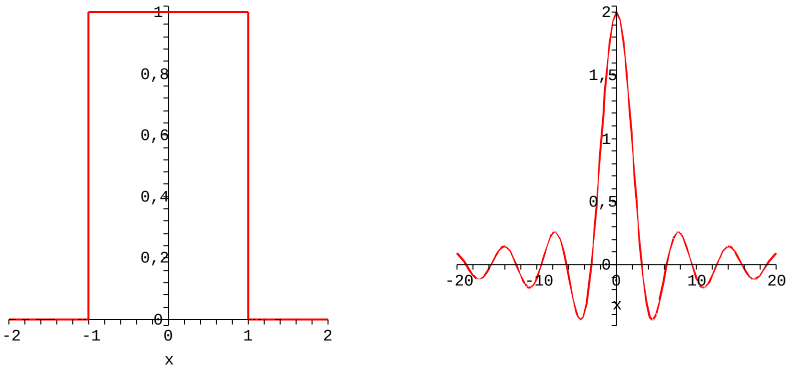
Aplicaţia 2.1.2. Se consideră un semnal de tip impuls

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right), & |t| \leqslant T \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

1. Reprezentaţi grafic semnalul în domeniul timp.
2. Calculaţi transformata Fourier pentru acest semnal.
3. Determinaţi frecvenţa nulurilor spectrale şi reprezentaţi grafic spectrul de amplitudine al acestui impuls, în domeniul frecvenţelor pozitive, pentru $T = 250\,\mu s$.

Acest semnal este limitat în timp şi este reprezentat în figura de mai jos. Pentru calculul transformatei Fourier, folosind relaţia $\cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$, obţinem

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\left(e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2T}-\omega)t} + e^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2T}+\omega)t}\right)\ \mathrm{d}t =$$



Semnalul dreptunghiular　　　　Sinusul atenuat

Figura 2.2: Spectrul semnalului dreptunghiular

$$T\left[\operatorname{sa}\left(\frac{\pi}{2}-\omega T\right)+\operatorname{sa}\left(\frac{\pi}{2}+\omega T\right)\right].$$

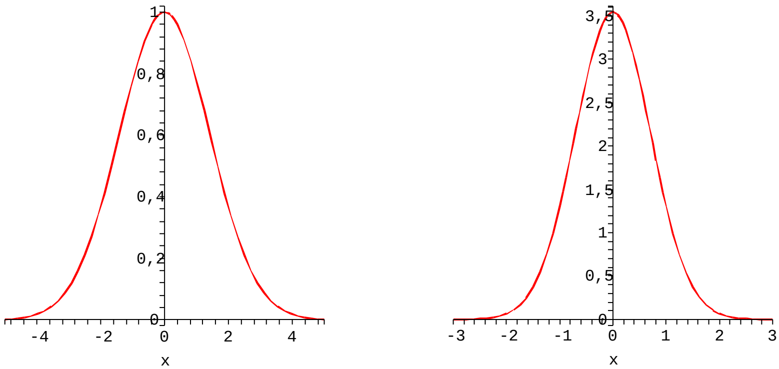
Spectrul de amplitudine a semnalului, calculat ca modul al transformatei Fourier, se anulează în acele puncte determinate de condiţia $\frac{\pi}{2}+\omega T=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Deducem valorile nulurilor spectrale: $\omega_k=\frac{(2k+1)\pi}{2T}$, $k\in\mathbb{Z}$. Rezultă frecvenţele nulurilor spectrale: $f_k=\frac{2k+1}{4T}$, $k\in\mathbb{Z}$. Pentru $T=250\,\mu s$, valorile acestor frecvenţe sunt: $1\,kHz$, $3\,kHz$, $5\,kHz$, etc.

Aplicaţia 2.1.3. Să determinăm transformata Fourier a funcţiei $f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$.
Pentru început stabilim transformata funcţiei $f(x)=e^{-x^2}$. Avem

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+\frac{\omega}{2}\mathrm{i})^2-\frac{\omega^2}{4}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x+\frac{\omega}{2}\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dacă notăm $z=x+\frac{\omega}{2}\mathrm{i}$ integrala se face pe o dreaptă paralelă cu axa ox, iar daca folosim teorema lui Cauchy din teoria funcţiilor complexe, rezultă, alegând drumuri convenabile, că integrala are aceeaşi valoare cu integrala reală $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$. Deci $\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. folosim Propoziţia 2.1.1 şi,



Semnalul Gauss — Transformarea Fourier

Figura 2.3: Transformarea clopotului lui Gauss

pentru funcţia din enunţ, obţinem

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathcal{F}(\frac{\omega}{\sqrt{a}}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \tag{2.5}$$

Aplicaţia 2.1.4. Să determinăm transformarea Fourier pentru funcţii de forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ unde P, Q sunt polinoame ce satisfac grad $Q > 1 +$ grad P iar Q nu se anulează pe $\mathbb{R}$.

După cum ştim din teorema reziduurilor

$$F(\omega) = 2\pi \mathrm{i} \sum_{Im\ z_i>0} \mathrm{Rez}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{-\mathrm{i}\omega z}, z_i\right).$$

unde termenul sumei reprezintă reziduul funcţiei în z_i.

Observaţia 2.1.2. Transformarea Fourier este injectivă. Într-adevăr, din egalitatea $\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[g(x)]$ deducem că $f = g$ a.p.t.

Problema de interes este să punem în evidenţă o clasă de funcţii pentru care transformarea Fourier să fie şi surjectivă, deci inversabilă.

Propoziţia 2.1.1 (Lema lui Riemann). *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este din $L^1(\mathbb{R})$, atunci pe orice interval $[a, b]$ are loc:*

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_a^b f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x = 0.$$

Demonstraţie. Dacă folosim formula $e^{-\mathrm{i}\omega x} = \cos\omega x - \mathrm{i}\sin\omega x$, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\omega x \,\mathrm{d}x = 0.$$

Pentru prima relaţie observăm că:

$$\left|\int_a^b \sin\omega x \,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\cos\omega b - \cos\omega a}{\omega}\right| \leqslant \frac{2}{\omega}.$$

Presupunem mai întâi că f este integrabilă în sens propriu şi descompunem $[a,b]$ în n părţi prin $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ relativ la care:

$$\int_a^b f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x.$$

Fie M_i, m_i marginile funcţiei (integrabile) f pe $[x_i, x_{i+1}]$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - m_i)\sin\omega x\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin\omega x \,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{2}{\omega}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ alegem diviziunea astfel ca:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

lucru posibil datorită integrabilităţii lui f. Alegem ω astfel ca:

$$\omega > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Avem:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

de unde deducem afirmaţia. Dacă f este integrabilă în sens impropriu şi presupunem că b este un punct singular, descompunem integrala pe intervalele $[a, b-\eta]$ şi $[b-\eta, b]$. A doua integrală se majorează

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x)\omega x \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{b-\eta}^b |f(x)| \,\mathrm{d}x,$$

iar pentru η suficient de mic poate fi făcută $< \dfrac{\varepsilon}{2}$. Prima integrală poate fi şi ea facută $< \dfrac{\varepsilon}{2}$, conform raţionamentului precedent şi pentru ω suficient de mare. ■

Observaţia 2.1.3. Demonstraţia este mai comodă într-un caz particular, frecvent întâlnit în practică şi anume: f este derivabilă şi cu derivata continuă. Într-adevăr afirmaţia rezultă din următorul calcul:

$$\int_{-A}^{A} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = -f(x)\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{\mathrm{i}\omega}\Big|_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A} f'(x)\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega}G(\omega),$$

unde $G(\omega)$ este o funcţie mărginită.

Teorema 2.1.2. *Transformata Fourier este o funcţie continuă şi*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0.$$

Demonstraţie. Deoarece f este din $L^1(\mathbb{R})$, integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$ converge uniform în raport cu parametrul ω, deci F este funcţie continuă. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar; deorece f este din $L^1(\mathbb{R})$ există $A_\varepsilon > 0$, astfel ca:

$$\int_{-\infty}^{-A_\varepsilon} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{A_\varepsilon}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci putem scrie:

$$|F(\omega)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-A_\varepsilon} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \Big|\int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| + \int_{A_\varepsilon}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Aplicând Lema lui Riemann,

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 0,$$

rezultă că există $\beta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $|\omega| > \beta_\varepsilon$ să avem

$$\Big|\int_{-A_\varepsilon}^{A_\varepsilon} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru $|\omega| > \beta_\varepsilon$ rezultă $|F(\omega)| < \epsilon$, de unde afirmaţia. ■

2.1.1 Clasa funcţiilor rapid descrescătoare $\mathcal{S}$

Pentru a asigura surjectivitatea transformării Fourier, introducem următoarea clasă de funcţii, numite *funcţii rapid descrescătoare*:

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall k, q \in \mathbb{N}, \exists C_{k,q}, |x^k f^{(q)}(x)| \leqslant C_{k,q}\}$$

unde $f^{(q)}$ este derivata de ordin q a funcţiei f. Un exemplu de funcţie care este din această clasă este $f(x) = e^{-x^2}$. Mai observăm că funcţiile din $\mathcal{S}$ sunt mărginite şi integrabile pe $\mathbb{R}$, deoarece au loc majorările

$$|x^k f^{(q)}(x)| \leqslant \frac{C_{k+2,q}}{x^2}$$

şi

$$|x^k f^{(q)}(x)| \leqslant \min\{C_{k,q}, \frac{C_{k+2,q}}{x^2}\} \leqslant \frac{C^*_{k,q}}{1+x^2}$$

unde $C^*_{k,q}$ este o constantă convenabil aleasă, iar funcţia din membrul al doilea este din $L^1(\mathbb{R})$.

Pentru demonstrarea unor proprietăţi suplimentare ale transformării Fourier este necesar să definim noţiunea de convergenţă pentru şirurile de funcţii din clasa $\mathcal{S}$.

Definiţia 2.1.3. *Spunem că şirul de funcţii* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ *este* convergent *la* 0 *în* $\mathcal{S}$, *dacă pentru orice* $k, q \in \mathbb{N}$,

$$(x^k f_n^{(q)}(x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge uniform la 0 pe } \mathbb{R}.$$

Teorema 2.1.3. *[**derivarea imaginii**] Dacă* $f \in \mathcal{S}$ *atunci*
$F \in C^\infty(\mathbb{R})$ *şi are loc*

$$\mathrm{i}^k \mathcal{F}[f(x)]^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[x^k f(x)](\omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se face prin inducţie, dar vom face efectiv doar etapa de verificare, trecerea de la k la $k+1$ nu ridică probleme deosebite. Deoarece $|f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}| \leqslant |f(x)|$ rezultă că integrala improprie converge uniform în raport cu parametrul ω, iar integrantul este derivabil în raport cu parametrul. Deci integrala (2.1) poate fi derivată în raport cu parametrul şi găsim

$$F'(\omega) = -\mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x = -\mathrm{i}\mathcal{F}[x f(x)](\omega).$$

■

Observaţia 2.1.4. 1) Constatăm că transformata Fourier a unei funcţii din $\mathcal{S}$ este indefinit derivabilă.

2) Teorema este valabilă pentru funcţii din $L^1(\mathbb{R})$ pentru care $x^k f(x)$ este din $L^1(\mathbb{R})$, deci gradul de ”netezime” pentru transformata Fourier creşte dacă se impun condiţii mai tari de descreştere spre infinit a funcţiei f.

Teorema 2.1.4 (imaginea derivatei). *Dacă $f \in \mathcal{S}$ are loc*

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](\omega) = (\mathrm{i}\omega)^k \mathcal{F}[f(x)](\omega). \tag{2.7}$$

Demonstraţie. Arătăm egalitatea doar pentru $k = 1$. Aplicând formula de integrare prin părţi,

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-\mathrm{i}\,\omega\,x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}\,\omega\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}[f(x)](\omega).$$

■

Observaţia 2.1.5. Indicăm două situaţii mai generale, în care formula precedentă este valabilă.

1) Dacă f este din $L^1(\mathbb{R})$, continuă cu derivata continuă pe porţiuni din $L^1(\mathbb{R})$, atunci are loc

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y$$

de unde

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

(altfel f nu ar fi integrabilă). În acest caz raţionamenul precedent rămâne valabil.

2) Dacă f este din $L^1(\mathbb{R})$, derivabilă, cu derivata continuă şi $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, atunci are loc formula (2.7).

Deci cu cât f are mai multe derivate integrabile, cu atât descreşterea la 0 (când argumentul tinde spre infinit) a transformatei Fourier este mai rapidă.

Teorema 2.1.5 (liniaritare şi continuitate). *Transformarea Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este o aplicaţie liniară şi continuă.*

Demonstraţie. Să arătăm pentru inceput că transformata unei funcţii din $\mathcal{S}$ este tot din $\mathcal{S}$. Mai întâi, dacă folosim egalităţile (2.6) şi (2.7), avem

$$\mathcal{F}[(x^k f)^{(q)}](\omega) = (\mathrm{i}\omega)^q \mathcal{F}[x^k f](\omega) = \mathrm{i}^k (\mathrm{i}\omega)^q \mathcal{F}^{(k)}[f](\omega).$$

Apoi aplicăm modulul în membrul al doilea şi obţinem

$$|\omega^q \mathcal{F}^{(k)}[f](\omega)| = |\mathcal{F}[(x^k f)^{(q)}](\omega)|$$

iar (din Teorema 2.1.2) al doilea membru se majorează cu o constantă ce depinde de k, q; deci transformata este funcţie din clasa $\mathcal{S}$. Liniaritatea transformării Fourier este evidentă. Pentru a arăta că aplicaţia este continuă, este suficient să demonstrăm ca dacă $(f_n)_n \in \mathcal{S}$ converge la 0 în $\mathcal{S}$, atunci $(\mathcal{F}[f_n])_n$ converge la 0 în $\mathcal{S}$. Aceasta rezultă din estimările

$$|\omega^k \mathcal{F}^{(q)}[f_n](\omega)| = |\mathcal{F}[(x^k f_n)^{(q)}](\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^k f_n)^{(q)}| \, \mathrm{d}t \to 0$$

uniform pe $\mathbb{R}$. ■

Teorema 2.1.6 (inversiune). *Dacă $f \in \mathcal{S}$ atunci are loc*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega. \tag{2.8}$$

Demonstraţie. Calculăm integrala din membrul al doilea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \right) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega.$$

Deoarece $|e^{\mathrm{i}\omega x} f(x)| \leqslant |f(x)|$, integrandul, ca funcţie de două variabile (ω, x), nu este din $L^1(\mathbb{R}^2)$, nu putem schimba ordinea de integrare. Pentru a evita acest neajuns vom proceda astfel: fie $g \in \mathcal{S}$ o funcţie arbitrar aleasă. Calculăm, prin schimbarea ordinei de integrare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) g(\omega) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{\mathrm{i}\omega(x-t)} \, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{F}[g](t-x) \, \mathrm{d}t =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \mathcal{F}[g](y) \, \mathrm{d}y.$$

Ultima egalitate s-a obţinut prin schimbarea de variabilă $t - x = y$. Deducem astfel egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) g(\omega) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \mathcal{F}[g](y) \, \mathrm{d}y. \tag{2.9}$$

Aplicăm raţionamentul precedent funcţiei $g(\varepsilon\, \omega)$, $\forall \varepsilon > 0$ şi avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) g(\varepsilon\omega) e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\varepsilon y) \mathcal{F}[g](y) \, \mathrm{d}y.$$

Deoarece $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in \mathcal{S}$ sunt integrabile şi mărginite putem trece la limită sub integrală, când $\varepsilon \to 0$ şi găsim

$$g(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f]e^{\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}\omega = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[g](y)\ \mathrm{d}y.$$

Deoarece g este arbitrar, îl alegem $g = e^{-\frac{t^2}{2}}$ şi din (2.5), pentru $a = \dfrac{1}{2}$ avem $\mathcal{F}[g] = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. Ţinând cont de egalităţile $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ \mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$ şi $g(0) = 1$ obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f]e^{\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}\omega = 2\pi f(x).$$

■

Corolarul 2.1.1. *Dacă $f \in \mathcal{S}$, are loc formula*

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = 2\pi f(-x). \tag{2.10}$$

Demonstraţie. Observăm că are loc egalitatea:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi f(-x)e^{\mathrm{i}\omega x}\ \mathrm{d}x$$

deci primul membru este transformata Fourier pentru $2\pi f(-x)$, de unde deducem relaţia. ■

Teorema 2.1.7. *Dacă $f, g \in \mathcal{S}$, atunci au loc:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](x)g(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}[g](x)\ \mathrm{d}x \tag{2.11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](x)\overline{\mathcal{F}[g]}(x)\ \mathrm{d}x \tag{2.12}$$

(**Imaginea produsului de convoluţie**)

$$\mathcal{F}[(f \star g)] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \tag{2.13}$$

(**Imaginea produsului**)

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g]. \tag{2.14}$$

Demonstraţie. Pentru a obţine (2.11) e suficient să luăm $x = 0$ în formula (2.9). Pentru (2.12), considerăm funcţia $h = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}[g]}$ şi aplicăm formula de inversiune.

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[g](\omega)e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\overline{\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[g]e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}[g]}e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega} = \overline{\mathcal{F}}[h](t).$$

Calculăm acum al doilea membru al relaţiei (2.12), unde înlocuim $g = h$ şi folosim relaţia precedentă

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f]\overline{\mathcal{F}[h]}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f](x)g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{F}[g(x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h}(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

de unde afirmaţia.

Pentru relaţia (2.13) observăm mai intâi că funcţia produs de convoluţie $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$ fiind din $L^1(\mathbb{R})$ admite transformată Fourier şi aceasta este:

$$\mathcal{F}[(f \star g)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-\mathrm{i}\omega(y+s)}\,\mathrm{d}s = \mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega).$$

Pentru (2.14), aplicăm produsului fg formula $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = 2\pi f(-x)$ şi avem

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[fg]](x) = 2\pi f(-x)g(-x). \tag{2.15}$$

Apoi din (2.13)

$$\mathcal{F}[(\mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g])] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] \cdot \mathcal{F}[\mathcal{F}[g]] = 2\pi f(-x)2\pi g(-x) = 2\pi\mathcal{F}[\mathcal{F}[fg]].$$

În ultima relaţie s-a folosit formula (2.15). ∎

Observaţia 2.1.6. Dacă în (2.12) alegem $f = g$, formula devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega. \tag{2.16}$$

Formula (2.16) se numeşte *formula lui Parseval*, care interpretată fizic exprimă o lege de conservare a energiei; primul membru reprezintă energia degajată de circuit, iar al doilea energia spectrală. Formula lui Parseval se poate extinde la funcţii din $L^2(\mathbb{R})$.

2.1.2 Transformările sinus şi cosinus

Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

Definiţia 2.1.4. *Numim* transformata cosinus *funcţia*

$$\mathcal{F}_C[f(t)](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \ \mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

Din teorema (2.1.6) rezultă *formula de inversiune*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_C(\omega) \cos \omega x \ \mathrm{d}\omega. \tag{2.18}$$

Definiţia 2.1.5. *Numim* transformata sinus *funcţia*

$$\mathcal{F}_S[f(x)](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x \ \mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Din teorema (2.1.6) rezultă *formula de inversiune*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}_S(\omega) \sin \omega x \ \mathrm{d}\omega. \tag{2.20}$$

2.1.3 Aplicaţii ale transformării Fourier

1. Teorema de eşantionare WKS

Această teoremă a fost stabilită de către Whittacker (1915), Kotelnikov (1933) şi Shannon (1948) şi este un instrument teoretic larg folosit în electronică pentru a aproxima un semnal continuu prin cunoaşterea doar a unui număr discret de valori. Introducem două clase de semnale. Pentru $a > 0$ notăm

$$T_a = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \in L^2(\mathbb{R}),\ f(t) = 0,\ |t| \geqslant a\}.$$

Un semnal din T_a se numeşte *semnal de durată finită* concentrat pe [-a, a]. Pentru $b > 0$, fie

$$F_b = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ f \in L^2(\mathbb{R}),\ |\mathcal{F}[f](\omega)| = 0,\ |\omega| \geqslant b\}.$$

Un semnal din T_b se mai numeşite *semnal cu bandă limitată de frecvenţă.*

Teorema 2.1.8 (Teorema WKS). *Fie $b > 0$, $T = \dfrac{\pi}{b}$ şi fie $f \in F_b$ o funcţie continuă. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$ are loc*

$$f(t) = \sum_{n \in Z} f(nT) sa(\ b(t - nT)) \tag{2.21}$$

unde $sa(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$ *este sinusul atenuat.*

Demonstraţie. Fie $f \in F_b$ continuă care admite transformata Fourier $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega)$ restrânsă la $[-b, b]$ şi prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$. F are dezvoltarea în serie Fourier sub forma complexă:

$$F(\omega) = \sum_{n \in Z} c_n e^{\mathrm{i}\ n \frac{\pi \omega}{b}}, \quad |\omega| < b,$$

unde coeficienţii c_n sunt daţi de formulele:

$$c_n = \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} F(\omega) e^{-\mathrm{i}\ n \frac{\pi\omega}{b}}\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-\mathrm{i}\ n \frac{\pi\omega}{b}}\ \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{b} F(\omega) e^{-\mathrm{i}\ n \frac{\pi\omega}{b}}\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\frac{\pi}{b} \mathcal{F}[f]](\frac{n\pi}{b}) = \frac{\pi}{b} f(-\frac{n\pi}{b}).$$

Înlocuim în expresia transformatei Fourier şi avem:

$$F(\omega) = \sum_{n \in Z} \frac{\pi}{b} f(-\frac{n\pi}{b}) e^{i\ n \frac{\pi\omega}{b}} = \frac{\pi}{b} \sum_{n \in Z} f(\frac{n\pi}{b}) e^{-i\ n \frac{\pi\omega}{b}}.$$

Din formula de inversiune obţinem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}t\omega}\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(\omega) e^{\mathrm{i}t\omega}\ \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} \frac{\pi}{b} \sum_{n \in Z} f(n\ T) e^{-\mathrm{i}\ nT\omega} e^{\mathrm{i}\ t\omega}\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2b} \sum_{n \in Z} f(n\ T) \int_{-b}^{b} \frac{\pi}{b} e^{\mathrm{i}\omega(t - nT)}\ \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{2b} \sum_{n \in Z} f(n\ T) \frac{e^{\mathrm{i}\ b(t-nT)} - e^{-\mathrm{i}\ b(t-nT)}}{\mathrm{i}\ (t - nT)} =$$

$$= \sum_{n \in Z} f(n\ T) \frac{\sin(t - nT)}{b(t - nT)} = \sum_{n \in Z} f(n\ T) sa\ (b(t - nT)).$$

T se numeşte *perioadă de eşantionare.* ∎

Aplicaţia 2.1.5. Să eşantionăm semnalul $f(t) = u(t)e^{-t}$, cu 10 eşantioane pe secundă ($T = 0,1s$).

Deoarece funcţia scade repede la 0, trunchiem f pe un interval, în afara căruia scade sub 0,01. Din condiţia $e^{-t} = 0,01$ rezultă $a = 4,605$, deci intervalul pe care îl luăm în considerare pentru eşantionare este $[0; 4,605]$ şi putem presupune că $f \in T_a$. Din condiţia $nT \leqslant 4,605$ deducem $n \leqslant 46$ şi $b = 10\pi$. Observăm că transformata Fourier $F(\omega)$ are modulul $|F(\omega)| = \dfrac{1}{1+\omega^2}$ descrescător la 0 şi care poate fi de asemena trunchiat pe intervalul $[-10\pi, 10\pi]$ şi presupus că aparţine clasei F_b. Avem $f(n\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{n\pi}{2}}$, $1 \leqslant n \leqslant 46$ şi semnalul f este aproximat prin formula

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{46} f(n\frac{\pi}{2}) sa(10\pi t - n\pi).$$

Aplicaţia 2.1.6. Se consideră un semnal sinusoidal cu amplitudinea de $5\,V$ şi frecvenţa de $1000\,Hz$. Să se calculeze eşantioanele acestuia pe o perioadă, ştiind că frecvenţa de eşantionare este de $8000Hz$ iar eşantionarea începe la momentul $t = 62,5\,\mu s$. Reprezentaţi grafic semnalul eşantionat pe intervalul de timp $0 - 1\,ms$.

Expresia unui semnal sinusoidal este $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, unde A este amplitudinea şi f_0 este frecvenţa semnalului. În cazul semnalului considerat $A = 5$, $f_0 = 1000$; prin urmare expresia sa este

$$s(t) = 5\sin(2000\pi t).$$

Raportul dintre frecvenţa de eşantionare şi cea a semnalului are valoarea 8, adică se citesc 8 eşantioane într-o perioadă de semnal. Perioada semnalului este $T = 1/f_0 = 0,001\,s = 1\,ms$. Momentele de eşantionare începând cu $T/16 = 62,5\,\mu s$ sunt următoarele:

$$\frac{T}{16}, \frac{3T}{16}, \frac{5T}{16}, \frac{7T}{16}, \frac{9T}{16}, \frac{11T}{16}, \frac{13T}{16}, \frac{15T}{16}.$$

Observăm că pe o perioadă, semnalul are simetrie impară faţă de mijlocul perioadei, adică $s\left(\frac{T}{2}+t\right) = -s\left(\frac{T}{2}-t\right)$. Pe o semiperioadă semnalul are o simetrie pară faţă de sfertul de perioadă, adică $s(\frac{T}{4}+t) = s(\frac{T}{4}-t)$. Rezultă că

$$s\left(\frac{T}{16}\right) = s\left(\frac{7T}{16}\right) = -s\left(\frac{9T}{16}\right) = -s\left(\frac{15T}{16}\right)$$

şi

$$s\left(\frac{3T}{16}\right) = s\left(\frac{5T}{16}\right) = -s\left(\frac{11T}{16}\right) = -13s\left(\frac{T}{16}\right).$$

Este suficient să se calculeze valorile primelor două eşantioane ale semnalului pentru a cunoaşte valorile tuturor eşantioanelor dintr-o perioadă:

$$s\left(\frac{T}{16}\right) = 5\sin\left(2000\pi\frac{T}{16}\right) = 5\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1,91V,$$

$$s\left(\frac{3T}{16}\right) = 5\sin\left(2000\pi\frac{3T}{16}\right) = 5\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 4,62V.$$

Secvenţa de eşantioane ale semnalului, pe o perioadă este urm̆toarea:

$$1,91;\ 4,62;\ 4,62;\ 1,91;\ -1,91;\ -4,62;\ -4,62;\ -1,91.$$

2. Relaţia de incertitudine

Teorema 2.1.9. *Presupunem că semnalul f este de clasă C^1 şi că satisface ipotezele*

i. $\lim\limits_{|t|\to\infty} tf^2(t) = 0$

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\ \mathrm{d}t = 1.$

Atunci are loc inegalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\ \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

Demonstraţie. Din formula lui Parseval (2.16) şi condiţia ii, deducem că

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega.$$

Să considerăm integrala

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha t f(t) + f'(t))^2\ \mathrm{d}t.$$

Au loc

$$I(\alpha) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\ \mathrm{d}t + 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) f'(t)\ \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) f'(t)\ \mathrm{d}t = t f^2(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (t f f' + f^2)\ \mathrm{d}t = -1 - \int_{-\infty}^{\infty} t f f' \mathrm{d}t$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f f'\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

Apoi, din formula lui Parseval aplicată derivatei şi (2.7) deducem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega.$$

În concluzie

$$I(\alpha) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)\ \mathrm{d}t - \alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2\ \mathrm{d}\omega$$

şi acest trinom este pozitiv pentru orice α, de unde afirmaţia. ■

Interpretare fizică. Dacă spectrul în frecvenţă $F(\omega)$ este concentrat, deci mic în modul cu excepţia unui interval mic, semnalul în timp are o durată mare.

2.2 Transformarea Fourier discretă

În practică integrala din definiţia transformatei Fourier se aproximează cu o sumă finită, fapt ce revine la aproximarea semnalului f cu un vector din $\mathbb{C}^N$. Fie $[x] = (x_n)_{n=0,\ldots,N-1},\ \ x_n \in \mathbb{C}$ un semnal cu un numar finit de valori pe care îl numim *semnal discret*.

Definiţia 2.2.1. *Numim* transformata Fourier discretă *a semnalului* $[x]$ *vectorul* $[f] = (f_k)_{k=0,\cdots,N-1} \in \mathbb{C}^N$ *ale cărui componente sunt:*

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi}{N}\mathrm{i}kn}, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.22}$$

Se numeşte transformare Fourier discretă*, aplicaţia*

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \Longrightarrow \mathbb{C}^N, \mathcal{F}[x] = [f]$$

care se notatează DFT (Discrete Fourier Transform).

Notăm $w = e^{-\frac{2\pi}{N}\mathrm{i}}$ şi (2.22) devine:

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w^{kn}, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.23}$$

Observaţia 2.2.1. Dacă $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă (un semnal continual), restrângând pe x la un interval mărginit şi reţinând N eşantioane, se obţine un semnal discret.

În practică N este o putere a lui 2, iar eşantioanele sunt:

$$0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2\pi(N-1)}{N}.$$

Atunci:

$$\mathcal{F}[x]\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^{kt}\,\mathrm{d}t.$$

Aproximând integrala cu o sumă (Riemann) finită găsim justificarea pentru formula (2.22). Introducem matricea

$$W = (w^{kn})_{k,n=0,\ldots,N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \ldots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \ldots & w^{2(N-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \ldots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

care este evident simetrică şi deoarece $|w| = 1$, calculând produsul dintre W şi conjugata sa, deducem:

$$W \cdot \overline{W} = \overline{W} \cdot W = N \cdot I_N.$$

Deci matricea W este inversabilă şi are inversa:

$$W^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W}. \tag{2.24}$$

Fie X respectiv F matricele:

$$F = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1}. \end{pmatrix}$$

Atunci (2.23) se poate scrie matriceal:

$$F = WX. \tag{2.25}$$

Astfel relaţia de calcul al transformatei F discrete (2.23) poate fi scrisa si matriceal ca în formula (2.25).

Propoziţia 2.2.1. *Dacă $k, l \in \mathbb{Z}$ are loc:*

$$\sum_{m=0}^{N-1} w^{km}w^{-lm} = \begin{cases} N, & \text{dacă } k-l \text{ divizibil cu } N \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Demonstraţie.

$$\sum_{m=0}^{N-1} w^{km} w^{-lm} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi}{N}\mathrm{i}m(k-l)} =$$

$$= \begin{cases} N & \text{dacă } k-l \text{ divizibil cu } N \\ \dfrac{1-e^{-\frac{2\pi}{N}\mathrm{i}(k-l)N}}{1-e^{-\frac{2\pi}{N}\mathrm{i}(k-l)}} = 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

■

Teorema 2.2.1 (inversiune). *Transformarea* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \Longrightarrow \mathbb{C}^N$ *este un izomorfism liniar. Dacă* $y \in \mathbb{C}^N$*, atunci:*

$$\mathcal{F}^{-1}[y] = (x_l)_{l=0,\ldots N-1}$$

unde:

$$x_l = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n w^{-ln}. \tag{2.26}$$

Demonstraţie. Transformarea este evident un operator liniar. Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ atunci

$$\mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{F}.$$

Rămâne de arătat că au loc $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1} = 1_{\mathbb{C}^N}$ şi $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = 1_{\mathbb{C}^N}$. Verificăm a doua relaţie. Pentru orice $[x] = (x_m)_{m=0,\ldots,N-1}$, fie $\mathcal{F}[x] = [y]$ unde vectorul $[y]$ are componentele

$$y_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m w^{km}.$$

Atunci

$$\mathcal{F}^{-1}[y] =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k w^{-lk}\right)_{l=0,\ldots,N-1} = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m w^{km}\right) w^{-lk}\right)_{l=0,\ldots,N-1}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{k=0}^{N-1} w^{(m-l)k}\right)_{l=0,\ldots,N-1} = (x_l)_{l=0,\ldots,N-1}.$$

În ultima relaţie s-a folosit propoziţia precedentă. Relaţia (2.26) poate fi scrisă sub forma

$$X = \frac{1}{N}\overline{W}\cdot F. \tag{2.27}$$

■

Interpretarea fizică a acestei teoreme este că orice semnal discret este unic determinat de transformata sa Fourier discretă.

Teorema 2.2.2. *Fie* $[x] = (x_m)_{m=0,\ldots,N-1}$, *cu* $x_m \in \mathbb{R}$ *şi* N *număr par, atunci au loc*

$$f_{\frac{N}{2}+r} = \bar{f}_{\frac{N}{2}-r}, \quad \forall\ r = 0, \ldots, \frac{N}{2} \tag{2.28}$$

$$f_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Demonstraţie. Relaţia (2.28) revine la

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_m w^{m(\frac{N}{2}+r)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m w^{-m(\frac{N}{2}-r)}$$

ceea ce este evident, deoarece $w^{Nm} = 1$. Pentru $r = 0$ în (2.28) se obţine relaţia (2.29). ∎

Importanţa practică a acestei teoreme este că reducem la jumătate numărul coeficienţilor care trebuie calculaţi şi prin urmare şi timpul de calcul se înjumătăţeşte.

Aplicaţia 2.2.1. Să determinăm transformata Fourier discretă a semnalului $[x] = (1, 1, -1, 0)$.

Avem $N = 4$, iar transformata Fourier discretă este

$$\mathcal{F}[x] = (x_0(-\mathrm{i})^0 + x_1(-\mathrm{i})^k + x_2(-\mathrm{i})^{2k} + x_3(-\mathrm{i})^{3k}) = (1 + (-\mathrm{i})^k + (-1)^{k+1})$$

pentru $k = 0, 1, 2, 3$; adică

$$\mathcal{F}[x] = (1, 2 - \mathrm{i}, -1, 2 + \mathrm{i}).$$

Observăm că $f_{\frac{N}{2}} = -1 \in \mathbb{R}$. Avem $w = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}} = -\mathrm{i}$, iar matricele W şi inversa sunt

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Definiţia 2.2.2. *Considerăm două semnale discrete* $[x] = (x_m)_{m=0,\ldots,N-1}$,*şi* $[y] = (y_m)_{m=0,\ldots,N-1}$. *Definim* convoluţia *prin*

$$[x \star y] = (x \star y)_{m=0,\ldots,N-1} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k}\right)_{m=0,\ldots,N-1} \tag{2.30}$$

iar corelaţia *prin:*

$$[\hat{z}] = (\hat{z})_m = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m+k}\right)_{m=0,\ldots,N-1}. \tag{2.31}$$

În relaţiile precedente semnalele se prelungesc prin periodicitate. Notăm $x \cdot y = (x_0 \cdot y_0, x_1 \cdot y_1, \ldots, x_{N-1} \cdot y_{N-1})$. Pentru orice $[x], [y] \in \mathbb{C}^N$ au loc:

$$\mathcal{F}[x \star y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y] \tag{2.32}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[x \star y] = N\mathcal{F}^{-1}[x] \cdot \mathcal{F}^{-1}[y] \tag{2.33}$$

$$\mathcal{F}[x] \star \mathcal{F}[y] = N\mathcal{F}[x \cdot y] \tag{2.34}$$

$$\mathcal{F}[\widehat{x \star y}] = \overline{\mathcal{F}[\bar{x}]} \cdot \mathcal{F}[y] \tag{2.35}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{x \star y}] = \overline{\mathcal{F}}^{-1}[\bar{x}] \cdot \mathcal{F}^{-1}[y] \tag{2.36}$$

$$\widehat{\mathcal{F}[x] \star \mathcal{F}}[y] = \mathcal{F}[x \cdot y]. \tag{2.37}$$

2.3 Distribuţii temperate şi transformarea Fourier

Vom extinde noţiunea de transformată Fourier pe o clasă convenabilă de distribuţii, numite temperate. Reamintim clasa funcţiilor rapid descrescătoare

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \in C^\infty(\mathbb{R}), \exists C_{k,q}, |t^k f^{(q)}(t)| \leqslant C_{k,q}\}.$$

Spunem că şirul $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge la $\varphi \in \mathcal{S}$ dacă pentru orice $k, q \in N$ $t^k \varphi_n^{(q)} \to t^k \varphi^{(q)}$, uniform pe $\mathbb{R}$. Considerăm clasa funcţiilor test

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid supp\ \varphi \text{ mărginit}\}.$$

Are loc incluziunea

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$$

şi în sens topologic, adică din convergenţa şirurilor în $\mathcal{D}$, rezultă şi convergenţa în $\mathcal{S}$. Mai observăm că incluziunea este strictă; de exemplu $e^{-t^2} \in \mathcal{S}$, dar nu este din $\mathcal{D}$. Să mai observăm că pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ există un şir $\varphi_n \in \mathcal{D}$ astfel ca $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{S}$, cum ar fi de exemplu $\varphi_n(t) = \varphi(t)\eta(\frac{t}{n})$, $\eta \in \mathcal{D}$ astfel ca $\eta = 1$ pentru $|t| < 1$. De asemenea derivarea şi transformarea liniară $at + b, a \neq 0$ sunt operaţii continue pe $\mathcal{S}$.

Definiţia 2.3.1. *Numim* distribuţie temperată *o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{S}$ prin şiruri.*

Notăm mulţimea distribuţiilor temperate cu $\mathcal{S}'$ şi observăm că $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Exemplul 2.3.1. Dacă o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are o creştere polinomială, adică există două constante $a > 0, A > 0$ astfel ca pentru orice $t \in \mathbb{R}$ să avem

$$|f(t)| \leqslant A|t|^a,$$

atunci f generează o distribuţie temperată prin formula

$$(T_f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\ \mathrm{d}t < \infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

În particular polinoamele definesc distribuţii temperate.

Spunem că şirul de distribuţii temperate $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la T în $\mathcal{S}'$ dacă

$$(T_n, \varphi) \to (T, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Aplicaţia 2.3.1. Dacă $T \in \mathcal{D}'$ are suport compact, ea admite o prelungire unică pe $\mathcal{S}$, ca element al lui $\mathcal{S}'$, astfel

$$(T, \varphi) = (T, \eta\varphi),\ \ \varphi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{D},\ \ \eta = 1$$

pe o vecinătate a suportului lui φ. Această funcţională este continuă; dacă $\varphi_k \to 0, k \to \infty$ în $\mathcal{S}$, atunci $\eta\varphi_k \to 0$ în $\mathcal{D}$. Se poate demonstra că prelungirea nu depinde de funcţia auxiliară η.

Folosind rezultatele asupra produsului direct şi al celui de convoluţie a două distribuţii oarecare, se pot demonstra următoarele proprietăţi:

Teorema 2.3.1. *Dacă $S \in \mathcal{S}'$ şi $T \in \mathcal{D}'$ are suport compact, atunci convoluţia $S \star T$ există în $\mathcal{S}'$ şi are loc reprezentarea*

$$(S \star T, \varphi) = (S(s) \cdot T(t), \eta(t)\varphi(s + t)),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

unde $\eta \in \mathcal{D}$ şi este egală cu 1 într-o vecinătate a suportului distribuţiei T.

Teorema 2.3.2. *Dacă $S, T \in \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{S}'$ atunci există $S \star T$, aparţine lui $\mathcal{S}'_+$ şi are loc*

$$(S \star T, \varphi) = (S(s) \cdot T(t),\ \eta_1(s)\,\eta_2(t)\,\varphi(s + t)), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

unde $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi sunt egale cu 1 într-o vecinătate a semiaxei $[0, +\infty)$ şi nule pentru $t < 0$, suficient de mare în valoare absolută.

Reamintim că dacă $\varphi \in \mathcal{S}$ atunci admite transformată Fourier dată de

$$\mathcal{F}[\varphi(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-\mathrm{i}\ \omega\ t}\ \mathrm{d}t, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \tag{2.38}$$

notată pe scurt $F(\omega)$, iar transformarea Fourier este un izomorfism pe $\mathcal{S}$. Inversa este dată de

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{\mathrm{i}\ \omega\ t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(-\omega)](t). \tag{2.39}$$

Acest lucru poate fi scris sub forma

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(-\omega)]. \tag{2.40}$$

Definiţia 2.3.2. *Dacă T este o distribuţie temperată, numim* transformata Fourier*, distribuţia notată $\mathcal{F}[T]$ şi definită prin*

$$(\mathcal{F}[T], \varphi) = (T, \mathcal{F}[\varphi]), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{2.41}$$

Formula de mai sus corespunde următoarei situaţii clasice: dacă $f \in \mathcal{S}$ atunci transformata sa Fourier, F, este funcţie local integrabilă şi generează o distribuţie, dată de

$$(T_F, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)\ \mathrm{d}\omega = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(t)e^{-\mathrm{i}t\omega}\varphi(\omega)\ \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)e^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}\omega = \int_{\infty}^{+\infty} f(t)\mathcal{F}[\varphi](t)\ \mathrm{d}t = (T_f, \mathcal{F}[\varphi]).$$

Teorema 2.3.3. *Transformarea Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ este un izomorfism bicontinuu.*

Demonstraţie. Se arată uşor că $\mathcal{F}[T]$ este o funcţională liniară; deoarece $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$, membrul al doilea din formula de definiţie (2.41) este bine-definit; mai mult, dacă $\varphi_n \to \varphi$ în $\mathcal{S}$ atunci rezultă şi convergenţa $\mathcal{F}[\varphi_n] \to \mathcal{F}[\varphi]$ în $\mathcal{S}$. Deducem continuitatea lui operatorului $\mathcal{F}$. Pentru aceasta , fie $(T_n)_n \in \mathcal{S}'$ cu $T_n \to T$ în $\mathcal{S}'$. Atunci

$$(\mathcal{F}[T_n], \varphi) = (T_n, \mathcal{F}[\varphi]) \to (T, \mathcal{F}[\varphi]) = (\mathcal{F}[T], \varphi)\ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

şi deci $\mathcal{F}$ este continuu. Dacă $T \in \mathcal{S}'$, definim transformarea

$$\mathcal{F}^{-1}[T] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[T(-\omega)]. \tag{2.42}$$

Arătăm că aceasta este inversa transformării Fourier, adică are loc egalitatea

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]\ ] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]\ ] = T,\ \forall T \in \mathcal{S}'.$$

Stabilim pentru început egalităţile:

$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]\ ], \varphi) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[\mathcal{F}[T](-\omega)], \varphi) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[T](-\omega), \mathcal{F}[\varphi]\ ) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[T], \mathcal{F}[\varphi](-\omega)) = (\mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi]\ ) = (T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\ ) = (T, \varphi).$$

Deci

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]\ ] = T,\ \forall T \in \mathcal{S}'.$$

Apoi

$$(\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]\ ], \varphi) = (\mathcal{F}^{-1}[T], \mathcal{F}[\varphi]\ ) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[T(-\omega)], \mathcal{F}[\varphi]\ ) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}(T(-\omega), \mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]\ ) = \frac{1}{2\pi}(T, \mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]\ ](-\omega)) =$$
$$= (T, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]\ ]) = (T, \varphi).$$

Aşadar avem şi egalitatea

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]\ ] = T,\ \forall T \in \mathcal{S}'.$$

■

Aplicaţia 2.2.2. Să arătăm că au loc următoarele formule:

$$\mathcal{F}[\delta_a] = T_{e^{-\mathrm{i}a\omega}}. \tag{2.43}$$

$$\mathcal{F}[\delta] = T_1 \tag{2.44}$$

$$2\pi\delta = \mathcal{F}[T_1] \tag{2.45}$$

Într-adevăr

$$(\mathcal{F}[\delta_a], \varphi] = (\delta_a, \mathcal{F}[\varphi]) = (\delta_a, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}t\omega}\ \mathrm{d}t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-\mathrm{i}ta}\ \mathrm{d}t = (T_{e^{-\mathrm{i}ta}}, \varphi),\quad \forall\varphi \in \mathcal{S}$$

şi prima formulă este dovedită. Pentru $a = 0$ în (2.43), deducem a doua formulă. Folosind formula de inversiune (2.42) deducem

$$\delta = \mathcal{F}^{-1}[T_1] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[T_1].$$

Astfel rezultă şi ultima afirmaţie. ■

Observaţia 2.3.1. Funcţia identic 1 nu are transformata Fourier, în timp ce distribuţia generată de această funcţie, T_1 admite transformată Fourier.

Enunţăm în continuare câteva proprietăţi ale transformatei Fourier.

Teorema 2.3.4 (derivarea imaginii). *Pentru orice $T \in \mathcal{S}'$ are loc*

$$\mathcal{F}[T]^{(n)} = \mathcal{F}[(-\mathrm{i}\omega)^n T]. \tag{2.46}$$

Demonstraţie. Au loc

$$(\mathcal{F}[T]^{(n)}, \varphi) = (-1)^n(\mathcal{F}[T], \varphi^{(n)}) = (-1)^n(T, \mathcal{F}[\varphi^{(n)}]) =$$

$$(-1)^n(T, (\mathrm{i}\omega)^n(\mathcal{F}[\varphi]) = ((-\mathrm{i}\omega)^n T, \mathcal{F}[\varphi]) = (\mathcal{F}[(-\mathrm{i}\omega)^n T], \varphi)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}$. În particular dacă $T = T_1$, atunci

$$\mathcal{F}[T_1]^{(n)} = \mathcal{F}[T_{(-\mathrm{i}\omega)^n}], \tag{2.47}$$

de unde, dacă folosim (2.45), deducem

$$2\pi \mathrm{i}^n \delta^{(n)} = \mathcal{F}[T_{\omega^n}]. \tag{2.48}$$

■

Observaţia 2.3.2. Toate polinoamele admit transformată Fourier în sensul distribuţiilor.

Teorema 2.3.5 (imaginea derivatei). *Pentru orice distribuţie temperată are loc*

$$\mathcal{F}[T^{(n)}] = (\mathrm{i}t)^n \mathcal{F}[T]. \tag{2.49}$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ avem

$$(\mathcal{F}[T^{(n)}], \varphi) = (T^{(n)}, \mathcal{F}[\varphi]) = (-1)^n(T, \mathcal{F}^{(n)}[\varphi]) =$$

$$= (-1)^n(T, (-\mathrm{i})^n \mathcal{F}[t^n\varphi]) = \mathrm{i}^n(\mathcal{F}[T], t^n\varphi) = ((\mathrm{i}t)^n \mathcal{F}[T], \varphi).$$

■

Corolarul 2.3.1. *Dacă $T = \delta$, are loc*

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}] = T_{(\mathrm{i}t)^n}. \tag{2.50}$$

Teorema 2.3.6 (întârziere). *Pentru orice distribuţie temperată are loc*

$$\mathcal{F}[T(t - t_0)] = e^{-\mathrm{i}t_0}\mathcal{F}[T]. \tag{2.51}$$

Demonstraţie.

$$(\mathcal{F}[T(t - t_0)], \varphi) = (T(t - t_0), \mathcal{F}[\varphi]) = (T(t), \mathcal{F}[\varphi](t + t_0)) =$$

$$= (T(t), \mathcal{F}[e^{-\mathrm{i}t_0}\varphi]) = (\mathcal{F}[T], e^{-\mathrm{i}t_0}\varphi) = (e^{-\mathrm{i}t_0}\mathcal{F}[T], \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

■

Teorema 2.3.7 (deplasare). *Pentru orice distribuţie temperată are loc*

$$\mathcal{F}[T](\omega+\omega_0)=\mathcal{F}[e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}T](\omega). \tag{2.52}$$

Demonstraţie.

$$(\mathcal{F}[T](\omega+\omega_0),\varphi)=(\mathcal{F}[T],\varphi(\omega-\omega_0))=(T,\mathcal{F}[\varphi(\omega-\omega_0)])=$$

$$=(T,e^{-i\omega_0}\mathcal{F}[\varphi])=(\mathcal{F}[e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}T],\varphi),\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}.$$

■

Teorema 2.3.8 (imaginea asemănării). *Pentru orice distribuţie temperată are loc*

$$\mathcal{F}[T(at)](\omega)=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}[T](\frac{\omega}{a}),\ a\neq 0. \tag{2.53}$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varphi\in\mathcal{S}$ avem

$$(\mathcal{F}[T(at)](\omega),\varphi)=(T(at),\mathcal{F}[\varphi(\omega)])=\frac{1}{|a|}(T(u),\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega\frac{u}{a}}\ \mathrm{d}\omega),$$

de unde prin schimbarea de variabiă $\omega=at$, rezultă

$$(T(u),\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(at)e^{-\mathrm{i}ut}\ \mathrm{d}t)=$$

$$=(T(u),\mathcal{F}[\varphi(at)])=(\mathcal{F}[T],\varphi(at))=(\frac{1}{|a|}\mathcal{F}[T](\frac{\omega}{a}),\varphi).$$

■

Se poate demonstra că dacă T este o distribuţie cu suport compact atunci transformata sa Fourier este o funcţie de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ şi admite reprezentarea

$$\mathcal{F}[T](\omega)=(T(t),\eta(t)e^{-\mathrm{i}t\omega}) \tag{2.54}$$

unde $\eta\in\mathcal{D}$ şi $\eta=1$ pe o vecinătate a suportului lui T.

Teorema 2.3.9 (imaginea convoluţiei). *Pentru orice distribuţie temperată T şi orice distribuţie cu suport compact S are loc*

$$\mathcal{F}[T\star S]=\mathcal{F}[T]\cdot\mathcal{F}[S]. \tag{2.55}$$

Demonstraţie. $T\star S$ este o distribuţie temperată şi poate fi scrisă relaţia

$$(T\star S,\varphi)=(T(t),S(s),\eta(s)\varphi(s+t))),\ \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

unde $\eta\in\mathcal{D}$ şi $\eta=1$ într-o vecinătate a lui *supp* S. Folosind această reprezentare au loc

$$(\mathcal{F}[T\star S],\varphi)=(T\star S,\mathcal{F}[\varphi])=(T(t),(S(s),\eta(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)e^{-\mathrm{i}(s+t)u}\ \mathrm{d}u)).$$

Folosind comutativitatea produsului direct dintre S şi T_1 rezultă

$$(S(s), \eta(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-\mathrm{i}(s+t)u} \,\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (S(s), \varphi(u) e^{-\mathrm{i}(s+t)u} \eta(s)) \,\mathrm{d}u.$$

Dacă se ţine seama de (2.54) egalităţile anterioare pot fi continuate

$$(T \star S, \varphi) = (T(t), \int_{-\infty}^{+\infty} (S(s), \varphi(u) e^{-\mathrm{i}(s+t)u} \eta(s)) \,\mathrm{d}u) =$$

$$= (T, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[S](u) \varphi(u) e^{-\mathrm{i}ut} \,\mathrm{d}u) =$$

$$= (T, \mathcal{F}[\mathcal{F}[S]]\varphi) = (\mathcal{F}[T], \mathcal{F}[S]\varphi) = (\mathcal{F}[T] \cdot \mathcal{F}[S], \varphi).$$

■

Un tabel al unor transformate Fourier uzuale este dat în anexe. Subliniem încă o dată că, prin lărgirea noţiunii de funcţie la cea de distribuţie se poate extinde transformata Fourier renunţând la integrabilitate pe axa reală, cum trebuia presupus în cazul clasic. Astfel se lărgeşte noţiunea de spectru în frecvenţă pentru o clasă mai largă de semnale (cum ar fi cele care descriu un salt la infinit).

Aplicaţia 2.3.3. Să determinăm transformatele Fourier ale distribuţiilor:

$$1)\ T_{e^{\mathrm{i}t^2}} \qquad\qquad 2)\ T_u.$$

1) Pentru prima distribuţie avem, pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(\mathcal{F}[T_{e^{\mathrm{i}t^2}}], \varphi) = (T_{e^{\mathrm{i}t^2}}, \mathcal{F}[\varphi]) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}t^2} \mathcal{F}[\varphi](t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \int_{-R}^{R} \varphi(\omega) e^{-\mathrm{i}t\omega} \,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-R}^{R} \varphi(\omega) \int_{-a}^{b} e^{\mathrm{i}t^2 - \mathrm{i}t\omega} \,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega =$$

$$= \int_{-R}^{R} \varphi(\omega) \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} e^{\mathrm{i}t^2 - \mathrm{i}t\omega} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \int_{-R}^{R} \varphi(\omega) \lim_{a,b\to\infty} e^{-\mathrm{i}\frac{\omega^2}{4}} \mathrm{d}\omega \int_{-a}^{b} e^{\mathrm{i}(t-\frac{\omega}{2})^2} \,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-\mathrm{i}\frac{\omega^2 - \pi}{4}} \,\mathrm{d}\omega.$$

În ultima relaţie s-au folosit integralele lui Fresnel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

şi exponenţiala în complex $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. Deci transformata Fourier este distribuţia

$$\sqrt{\pi} e^{-\frac{\mathrm{i}(\omega^2-\pi)}{4}}.$$

2) Reamintim că transformata Fourier pentru funcţia $u(t)e^{-at}$ este

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega} = \frac{1}{-\mathrm{i}(-\omega+\mathrm{i}a)}.$$

Dacă trecem la limită pentru $a \to 0$, atunci $ue^{-at} \to u$ în $\mathcal{S}'$, iar operatorul $\mathcal{F}$ fiind continuu deducem în primul membru $\mathcal{F}[u(t)]$, iar al doilea membru tinde la $\dfrac{1}{-\mathrm{i}(-\omega+\mathrm{i}0)}$ care, din formulele lui Sohotski (1.43), este $-\dfrac{1}{\mathrm{i}}(-\mathrm{i}\pi\delta - Vp\dfrac{1}{\omega}) = \pi\delta - \mathrm{i}Vp\dfrac{1}{\omega}$.

Următoarea formulă este folosită în teoria ecuaţiior eliptice.

Aplicaţia 2.3.4. (**formula lui Poisson**). Pentru orice $t > 0$ are loc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{t}}.$$

La derivarea distribuţiilor am stabilit formula Poisson (1.57). Vom relua din demonstraţia ei afirmaţia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{e^{\mathrm{i}n\frac{2\pi\omega}{\omega_0}}}.$$

Luăm $\omega_0 = 2\pi$ şi formula devine

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{e^{\mathrm{i}n\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(\omega - n)].$$

Atunci, pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$, obţinem

$$2\pi(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2n\pi), \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi) =$$

$$= (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(\omega - n)], \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta(\omega - n), \mathcal{F}[\varphi]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](n).$$

Deci pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](n).$$

Alegem $\varphi(x) = e^{-\frac{tx^2}{4\pi^2}}$, transformata sa Fourier este $\mathcal{F}[\varphi] = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\omega^2\pi^2}{t}}$ şi obţinem formula căutată.

2.3.1 Rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale.

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul $n \in \mathbb{N}$ cu forma generală

$$a_n(t)U^{(n)} + a_{n-1}(t)U^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)U = T \tag{2.56}$$

unde $a_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, iar $T \in \mathcal{D}'$. Notăm

$$L = a_n(t)\frac{d^{(n)}}{ds^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{(n-1)}}{ds^{n-1}} + \cdots + a_0(t)I$$

şi atunci ecuaţia (2.56) devine

$$L(U) = T.$$

Definiţia 2.3.3. *Numim* soluţie generalizată *(în sensul teoriei distribuţiilor) pe intervalul (a,b), orice distribuţie $S \in \mathcal{D}'(a,b)$ care satisface*

$$(a_n(t)S^{(n)} + a_{n-1}(t)S^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)S, \varphi) = (T, \varphi), \tag{2.57}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$.

$\mathcal{D}(a,b)$ este mulţimea tuturor funcţiilor φ, indefinit derivabile pe intervalul (a,b) care au *supp* $\varphi \subset (a,b)$. Relaţia (2.57) este echivalentă cu

$$(S, (-1)^n a_n\varphi^{(n)} + (-1)^{n-1}a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_0\varphi) = (T, \varphi), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Presupunem că termenul liber este o distribuţie generată de o funcţie, $T = T_f$. Atunci ecuaţiei (2.56) îi putem asocia o ecuaţie diferenţială ordinară

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_0(t)y(t) = f(t). \tag{2.58}$$

Este evident că orice soluţie clasică este şi soluţie în sensul distribuţiilor. Reciproca este dată de umătoarea lemă.

Lema 2.3.1. *Dacă $T = T_f$ cu $f \in C(a,b)$ şi soluţia generalizată este de forma $S = T_y$ unde funcţia $y \in C^n(a,b)$, atunci y este şi soluţie clasică a ecuaţiei diferenţiale* (2.58).

Demonstraţie. Deoarece $y \in C^n(a,b)$, atunci derivatele în sensul distribuţiilor sunt

$$T_y^{(k)} = T_{y^{(k)}},\ k = 1, \ldots, n.$$

Dacă S este soluţie are loc

$$L(T_y) - T_f = 0$$

pe (a,b) în sens distribuţional. Din Lema du Bois-Raymond rezultă că, aproape pentru toţi $t \in (a,b)$ are loc egalitatea

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = f(t).$$

Din continuitate rezultă că relaţia precedentă are loc pentru orice $t \in (a,b)$ peste tot; deci y este soluţie clasică. ∎

Considerăm ecuaţia cu coeficienţi constanţi

$$a_n S^{(n)} + a_{n-1}S^{(n-1)} + \cdots + a_0 S = T,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}. \tag{2.59}$$

Definiţia 2.3.4. *Numim* soluţie fundamentală *a ecuaţiei* (2.59) *distribuţia* U *care satisface*

$$L(U) = \delta, \tag{2.60}$$

unde $L = a_n \dfrac{d^{(n)}}{ds^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{(n-1)}}{ds^{n-1}} + \cdots + a_0 I.$

În general soluţia nu este unică, ci este determinată până la o soluţie arbitrară a ecuaţiei $L(V) = 0$; adică dacă U este soluţie fundamentală şi V este o soluţie a ecuaţiei $L(V) = 0$, atunci $U + V$ este soluţie fundamentală.

Lema 2.3.2. *U este o soluţie fundamentală pentru L dacă şi numai dacă transformata Fourier satisface*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\mathrm{i}\omega)^k \mathcal{F}[U] = 1. \tag{2.61}$$

Demonstraţie. Fie U soluţie fundamentală. Aplicăm ecuaţiei (2.60) transformata Fourier şi avem

$$\mathcal{F}[L(U)] = \mathcal{F}[\delta].$$

Dar $\mathcal{F}[\delta] = 1$ iar primul membru devine succesiv

$$\mathcal{F}[L(U)] = \mathcal{F}[\sum_{k=0}^{n} a_k U^{(k)}] = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{F}[U^{(k)}] = \sum_{k=0}^{n} a_k(\mathrm{i}\omega)^k \mathcal{F}[U],$$

deci are loc (2.61). Reciproc, rezultă făcând trecerea inversă pe formulele precedente. ∎

Această lemă reduce rezolvarea ecuaţiei liniare cu coeficienţi constanţi la rezolvarea unor ecuaţii algebrice de forma

$$P(\omega)X = 1$$

unde $P(\omega)$ este un polinom oarecare. Construcţia unei soluţii fundamentale este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.3.10. *Fie $y = y(x)$ soluţia problemei Cauchy*

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0 \\ y(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0 \\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{2.62}$$

Atunci distribuţia generată de $u(t)y(t)$ este soluţie fundamentală.

Demonstraţie. Derivăm distribuţia $U = T_{u(t)y(t)}$, folosind condiţiile Cauchy. Avem

$$\begin{aligned} &U' = T_{uy'} + \delta \cdot (y(0+0) - y(0)) = T_{uy'} \\ &\ldots \\ &U^{(n-1)} = T_{uy^{(n-1)}} \\ &U^{(n)} = T_{uy^{(n)}} + \delta \cdot 1. \end{aligned}$$

Folosind ecuaţia (2.62) rezultă evident

$$a_n U^{(n)} + \cdots + a_0 U + \delta = 0 + \delta = \delta.$$

■

Teorema 2.3.11. *Fie $U \in \mathcal{D}'$ soluţie fundamentală a operatorului L şi $T \in \mathcal{D}'$ astfel încât să existe convoluţia $U \star T$. Atunci soluţia ecuaţiei* (2.59) *există în $\mathcal{D}'$ şi este de forma*

$$S = U \star T.$$

Soluţia este unică în clasa de distribuţii din $\mathcal{D}'$ pentru care există convoluţia cu U.

Demonstraţie. Arătăm că $U \star T$ este soluţie.

$$L(U \star T) = \sum_{k=0}^{n} a_k (U \star T)^{(k)} = (\sum_{k=0}^{n} a_k U^{(k)}) \star T =$$

$$= L(U) \star T = \delta \star T = T.$$

Pentru unicitate arătăm că ecuaţia omogenă

$$a_n V^{(n)} + \cdots + a_0 V = 0$$

are numai soluţia nulă în clasa de distribuţii pentru care convoluţia cu U există în $\mathcal{D}'$. Într-adevăr avem

$$V = V \star \delta = V \star L(U) = L(V) \star U = 0 \star U = 0$$

■

Aplicaţia 2.3.5. Să rezolvăm ecuaţia

$$T'' + 2T' + T = 2\delta + \delta'.$$

Pentru soluţia fundamentală asociem problema Cauchy

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

cu soluţia $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Condiţiile iniţiale ne conduc la $y(t) = e^{-t}$. Soluţia fundamentală este $U = T_{u(t)y(t)}$, iar a problemei este

$$T = U \star (2\delta + \delta') = 2U + U' = T_{u(t)(t+1)e^{-t}}.$$

Prezentăm o a doua metodă de rezolvare. Aplicăm transformarea Fourier. Obţinem

$$(\mathrm{i}\omega)^2 F + 2\mathrm{i}\omega F + F = 2 + \mathrm{i}\omega,$$

unde $F = \mathcal{F}[T]$ este transformata lui T. Deducem

$$F = \frac{2+\mathrm{i}\omega}{(1+\mathrm{i}\omega)^2} = \frac{1}{(1+\mathrm{i}\omega)^2} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}.$$

Dar, din cazul clasic

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} = \mathcal{F}[e^{-t}u(t)],$$

iar

$$\frac{1}{(1+\mathrm{i}\omega)^2} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}\Big)' = \mathrm{i}\mathcal{F}[-(\mathrm{i}t)u(t)e^{-t}] = \mathcal{F}[tu(t)e^{-t}].$$

Deducem că

$$F = \mathcal{F}[(1+t)e^{-t}]u(t),$$

iar prin inversare

$$T = u(t)(1+t)e^{-t}.$$

Problema Cauchy. Considerăm ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(t), \ t \geqslant 0$$

cu condiţiile iniţiale

$$y^{(k)} = y_k, \ k = 0, \dots, n-1.$$

Admitem că funcţia f este continuă pe $[0, +\infty)$. Prelungim funcţiile y şi f cu valoarea 0, pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi notăm cu $\tilde{y}$ şi $\tilde{f}$ aceste prelungiri. Din (1.53) rezultă

$$T^{(k)}\tilde{y} = T_{\tilde{y}^{(k)}} + \sum_{i=1}^{k} y_k \delta^{(k-i)}, \ k = 1, \dots n.$$

Transformând ecuaţia, obţinem

$$L(T_{\tilde{y}}) = T_{\tilde{f}} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)},$$

unde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_{n-1}y_0 + \cdots + a_1 y_{n-2} + y_{n-1} \\ c_{n-2} &= a_1 y_0 + y_1 \\ c_{n-1} &= y_0. \end{aligned}$$

Astfel problema Cauchy se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de tipul (2.59).

2.4 Probleme

Problema 2.4.1. Determinaţi transformatele Fourier ale funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de mai jos:

1° $f(x) = u(x)e^{-ax}$, $a > 0$;

⌈ **R**: $F(\omega) = \dfrac{1}{a + \mathrm{i}\omega}$. ⌋

2° $f(x) = u(-x)e^{ax}$, $a > 0$;

⌈ **R**: $F(\omega) = \dfrac{1}{a - \mathrm{i}\omega}$. ⌋

3° $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$;

⌈ **R**: $f(x) = u(x)e^{-ax} + u(-x)e^{ax}$ şi folosind punctele 2° şi 3° găsim: $F(\omega) = \dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$. ⌋

4° $f(x) = \dfrac{2a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$;

⌈ **R**: Dacă folosim formula de inversiune (2.8) şi rezultatul precedent găsim: $F(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$. ⌋

5° $f(x) = e^{\mathrm{i}x^2}$;

⌈ **R**: $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}x^2 - \mathrm{i}x\omega}\, \mathrm{d}x = e^{-\frac{\mathrm{i}\omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}(x - \frac{\omega}{2})^2}\, \mathrm{d}x$, iar pentru ultima integrală folosim definiţia exponenţialei în complex şi integralele lui Fresnel. Rezultă $F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{\frac{\mathrm{i}}{4}(\pi - \omega^2)}$. ⌋

6° $f(x) = e^{-\mathrm{i}x^2}$.

⌈ **R**: Ca la punctul precedent găsim: $F(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\pi-\omega^2)}$. ⌋

Problema 2.4.2. Să se calculeze transformata Fourier a impulsului de tip cosinus ridicat definit pe intervalul de timp $[-T, T]$,

$$f(t) = 1 + \cos\frac{\pi t}{T}.$$

⌈ **R**: $\mathcal{F}[f](\omega) = 2\pi\delta(\omega) + T\mathrm{sa}(\pi - \omega T) + T\mathrm{sa}(\pi + \omega T)$. ⌋

Problema 2.4.3. Arătaţi ca dacă funcţia $f(x)$ are transformata Fourier $F(\omega)$, atunci au loc:

$$\mathcal{F}\left[f(x)\sin ax\right](\omega) = \frac{1}{2i}(F(\omega - a) - F(\omega + a)); \tag{2.63}$$

$$\mathcal{F}\left[f(x)\cos ax\right](\omega) = \frac{1}{2}(F(\omega - a) + F(\omega + a)). \tag{2.64}$$

⌈ **R**: Se exprimă $\sin ax$ şi $\cos ax$, cu exponenţiala în complex şi se foloseşte formula (2.3).⌋

Problema 2.4.4. Calculaţi transformatele Fourier ale următoarelor funcţii:

1° $f(x) = u(x)x^3e^{-x}$;

⌈ **R**: Din Problema 2.4.1, 1° transformata funcţiei $u(x)e^{-x}$ este $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}\omega}$; apoi folosim Teorema 2.1.3 de derivare a imaginii şi obţinem

$$\mathcal{F}\left[u(x)x^3e^{-x}\right](\omega) = \mathrm{i}^3\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}\right)''' = \frac{6}{(1+\mathrm{i}\omega)^4}.$$ ⌋

2° $f(x) = e^{-(x-3)^2}$;

⌈ **R**: Transformata funcţiei e^{-x^2} este $\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$ şi folosind formula (2.2) găsim

$$\mathcal{F}[e^{-(x-3)^2}](\omega) = \sqrt{\pi}e^{-3\mathrm{i}\omega}e^{-\omega^2/4} = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}(\cos(3\omega) + \mathrm{i}\sin(3\omega)).$$ ⌋

3° $f_1(x) = e^{-|x|}\cos x$ şi $f_2(x) = e^{-|x|}\sin x$.

⌈ **R**: Putem scrie $f_1(x) = f(x)\cos x$, $f_2(x) = f(x)\sin x$, unde $f(x) = e^{|x|}$ are transformata $F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$; aplicăm Problema 2.4.3 şi rezultă

$$f_1(x) \Longrightarrow F_1(\omega) = \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{1+(\omega+1)^2},$$

$$f_2(x) \Longrightarrow F_2(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1+(\omega-1)^2} - \frac{1}{1+(\omega+1)^2}\right). \rfloor$$

Problema 2.4.5. Dacă f din $L^1(\mathbb{R})$ este continuă şi $xf(x)$ este din $L^1(\mathbb{R})$, atunci are loc

$$\mathrm{i}\mathcal{F}'[f](\omega) = \mathcal{F}[xf](\omega).$$

⌈ **R**: Deoarece $|f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}| \leqslant |f(x)|$ rezultă că integrala improprie care defineşte transformata $F(\omega) = \int_{\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$ converge uniform în raport cu parametrul ω. Integrantul este derivabil în raport cu parametrul şi atunci prin derivare şi amplificare cu $-\mathrm{i}$ rezultă formula. ⌋

Problema 2.4.6. Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ iar f, f' sunt din $L^1(\mathbb{R})$ şi $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ atunci are loc

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = (\mathrm{i}\omega)\mathcal{F}[f](\omega).$$

⌈ **R**: Aplicând formula de integrare prin părţi avem

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}[f](\omega). \rfloor$$

Problema 2.4.7. Dacă $f(x)$ are transformata Fourier $F(\omega)$ şi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, atunci

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right](\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega).$$

⌈ **R**: Folosind formula de integrare prin părţi, găsim:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}[f](\omega). \rfloor$$

Problema 2.4.8. Arătaţi că produsul de convoluţie a două funcţii este comutativ.
⌈ **R**: $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (g \star f)(x).$ ⌋

Problema 2.4.9. Determinaţi, dacă este posibil, produsele de convoluţie ale următoarelor funcţii şi transformatele Fourier ale acestora.

1° $f(x) = g(x) = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R};$

⌈ **R**: Produsul există, funcţiile fiind din $L^1(\mathbb{R})$.

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-(x-y)^2}\ \mathrm{d}y = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2-2xy}\mathrm{d}y =$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y+\frac{x}{2})^2}\ \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$ ⌋

2° $f(x) = g(x) = u(x)e^x,\ x \in \mathbb{R};$

⌈ **R**: Funcţiile nu sunt integrabile pe $\mathbb{R}$ totuşi, fiind nule pe semiaxa negativă, există produsul lor de convoluţie

$$(f \star g)(x) = \int_0^x e^y e^{x-y}\ \mathrm{d}y = u(x)xe^x;$$

această funcţie nu admite transformată Fourier. ⌋

3° $f(x) = g(x) = u(x + \frac{1}{\pi})u(\frac{1}{\pi} - x)\frac{1}{\pi}.$

⌈ **R**:

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\pi) \cup [\pi, +\infty) \\ \frac{\pi+x}{\pi^2}, & x \in [-\pi, 0) \\ \frac{\pi-x}{\pi^2}, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Au loc

$$\mathcal{F}\left[f \star g\right](\omega) = \left(\frac{2}{\pi\omega}\sin\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)\right)^2.$$ ⌋

Problema 2.4.10. Să se calculeze convoluţia dintre două impulsuri rectangulare identice, de amplitudine 1 şi definite pe intervalul de timp $[\,0, T\,]$.
⌈ **R**: Rezultatul convoluţiei este un impuls triunghiular de durată $2T$

$$h(t) = \begin{cases} t + T, & -T \leqslant t < 0 \\ T - t, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$ ⌋

Problema 2.4.11. Să se calculeze convoluţia dintre impulsul rectangular de amplitudine 1 definit pe intervalul de timp $[\,0, T\,]$ şi funcţia $g(t) = ae^{-at}$.
⌈ **R**: $(f \star g)(t) = e^{-at}[e^{aT} - 1]$. ⌋

Problema 2.4.12. Rezolvaţi ecuaţia integrală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega = f(x)$$

unde

$a)\ f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

⌈ **R**: $g(\omega) = \mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}f](\omega)$

$a)\ g(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} xe^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega - \frac{2}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\right);$

$b)\ g(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x^2e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega^2-2}{\omega^3}\sin\omega + \frac{2}{\omega^2}\cos\omega\right).$ ⌋

Problema 2.4.13. Aproximaţi semnalul continual $f(t) = e^{-2|t|}$ pe intervalul $[-20, 20]$, folosind teorema de eşantionare cu $b = 1000Hz$.
⌈ **R**: $F(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$ iar pentru $b = 1$, rezultă $T = \pi\, ms$. Din condiţia $-20 < nT < 20$, deducem $-6 < n < 6$ şi rezultă aproximarea prin semnalul discret $f(t) = \sum_{n=-5}^{n=5} e^{-2|n\pi|}sa(t - n\pi)$. ⌋

Problema 2.4.14. Să se calculeze, prin metoda matriceală, transformata Fourier discretă a vectorului de 6 valori ale unui semnal sinusoidal discret: $[x] = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0,5 & -0,5 & -1 & -0,5 \end{pmatrix}$.
⌈ **R**: Transformata Fourier discretă a vectorului $X = [x]^t$ se calculează matriceal cu relaţia (2.25) $F = WX$. Pentru vectorul dat cu $N = 6$ valori, matricea W are valorile $(w^{kn})_{k,n=0,1,\ldots,5} = e^{-\mathrm{i}\pi kn/3}$, unde $w = e^{-\mathrm{i}\pi/3}$. În matricea W apar valorile $w^0 = 1$, $w^1 = e^{-\mathrm{i}\pi/3} = 1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3/2}$, $w^2 = e^{-\mathrm{i}2\pi/3} = -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3/2}$, $w^3 = e^{-\mathrm{i}3\pi/3} = -1$, $w^4 = e^{-\mathrm{i}4\pi/3} = -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3/2}$, $w^5 = e^{-\mathrm{i}5\pi/3} = 1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3/2}$. Atunci transformata cerută este

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^0 & w^2 & w^4 \\ 1 & w^3 & w^0 & w^3 & w^0 & w^3 \\ 1 & w^4 & w^2 & w^0 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 - 2,5981\mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,5 + 2,5981\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Prima componentă a vectorului F are semnificaţia valorii medii a semnalului care este nulă. Şi alte componente sunt egale cu zero, ceea ce este normal pentru semnale pur sinusoidale. $\rfloor$

Problema 2.4.15. Determinaţi semnalul discret care are spectrul în frecvenţă de forma $\begin{pmatrix} 1, & 1+\mathrm{i}, & 0, & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

$\lceil$ **R**: Din formula de inversare, (2.27), semnalul $[x]$ este dat de

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \rfloor$$

Problema 2.4.16. Calculaţi transformatele Fourier sinus şi cosinus pentru funcţiile de mai jos:

$$1^\circ \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ \dfrac{1}{2}, & x = a \\ 0, & x > a; \end{cases}$$

$\lceil$ **R**: $F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}\sin a\omega; \quad F_S(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}(1-\cos a\omega).$ $\rfloor$

$$2^\circ \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & a < x < b \\ 0, & x > b \\ \dfrac{1}{2}, & x \in \{a, b\}; \end{cases}$$

$\lceil$ **R**: $F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}(\sin b\omega - \sin a\omega);$

$F_S(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}(\cos a\omega - \cos b\omega).$ $\rfloor$

$$3^\circ \quad f(x) = e^{-ax},\ x > 0, \quad a > 0;$$

$\lceil$ **R**: $F_C(\omega) + \mathrm{i}F_S(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a+\mathrm{i}\omega}{a^2+\omega^2}$; de unde $F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$, iar $F_S(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega}{a^2+\omega^2}$. $\rfloor$

Problema 2.4.17. Calculaţi transformata cosinus a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. Deduceţi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\frac{\sin\omega x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\omega e^{-\omega}$.

⌈ **R**: $F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos \omega x}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \mathrm{Re} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{\mathrm{i}\omega x}}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x \right).$

Aceasta se calculează cu teorema reziduurilor.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{\mathrm{i}\omega x}}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x = \pi \mathrm{iRez} \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}\omega z}}{(1+z^2)^2}; \mathrm{i} \right) = \dfrac{\pi}{4}(\omega+1)e^{-\omega}$

(s-a folosit faptul că i este pol de ordinul 2 pentru funcţia $g(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}\omega z}}{(1+z^2)^2}$ şi reziduul se calculează cu formula $\dfrac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n g(z)))$. Transformata este $F_C(\omega) = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} e^{-\omega}(\omega+1)$. A doua afirmaţie rezultă dacă derivăm în raport cu parametrul ω în relaţia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} e^{-\omega}(\omega+1).$$ ⌋

Problema 2.4.18. Arătaţi că funcţiile $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ şi $e^{-\frac{x^2}{2}}$ coincid cu transformatele lor prin cosinus.

⌈ **R**: Se ţine cont de integralele improprii cunoscute $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ şi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}},\ a > 0.$ ⌋

Problema 2.4.19. Arătaţi că funcţiile $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ şi $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ coincid cu transformatele lor prin sinus.

⌈ **R**: Se are în vedere că $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. ⌋

Problema 2.4.20. Deduceţi *formulele lui Parseval*:

$$\int_0^{+\infty} F_C(\omega) G_C(\omega) \, \mathrm{d}\omega = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} F_S(\omega) G_S(\omega) \, \mathrm{d}\omega = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

⌈ **R**: $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_C(\omega) G_C(\omega)\ \mathrm{d}\omega = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} F_C(\omega)\ \mathrm{d}\omega \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) \cos \omega x \, \mathrm{d}x =$
$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x \displaystyle\int_0^{+\infty} F_C(\omega) \cos \omega x \, \mathrm{d}\omega = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) g(x)\ \mathrm{d}x.$

Analog pentru cea de-a doua relaţie. ⌋

Problema 2.4.21. Să se calculeze transformatele Fourier cosinus şi sinus ale funcţiei $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$, $a > 0$. Folosind formulele Parseval, să se deducă apoi relaţiile

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{(1-\cos ax)(1-\cos bx)}{x^2}\,\mathrm{d}dx = \frac{\pi}{2}\min\{a,b\}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}a, \quad a,b>0.$$

⌈ **R**: $F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos\omega x\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega a}{\omega}$

$F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin\omega x\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\omega a}{\omega}.$

Fie $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < b \\ 0, & x > b, \end{cases}$ a, $b > 0$. Înlocuim în prima formulă a lui Parseval şi avem

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega a \sin\omega b}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\min\{a,b\}}\mathrm{d}x,$$

de unde prima egalitate. Din a doua formulă Parseval obţinem

$$\int_0^\infty \frac{(1-\cos ax)(1-\cos bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\min\{a,b\}.$$

Pentru $a=b$ deducem $\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}a.$ ⌋

Problema 2.4.22. Folosind formulele lui Parseval, deduceţi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}.$$

⌈ **R**: Se consideră funcţiile $f(x) = e^{-ax}, x > 0$ şi $g(x) = e^{-bx}, x > 0$ şi se utilizează rezultatele obţinute la Problema 2.4.16, 3°. ⌋

Problema 2.4.23. Rezolvaţi următoarele ecuaţii integrale:

1° $\int_0^{+\infty} g(u)\sin ux\,\mathrm{d}u = f(x)$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{4}, & 0 < x < 2\pi \\ \frac{\pi}{4}, & x = 2\pi \\ 0, & x > 2\pi; \end{cases}$

⌈ **R**: $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x) \sin ux \; \mathrm{d}x = \dfrac{16u}{1-16u^2} \cos 2\pi u.$ ⌋

2° $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u) \cos ux \; \mathrm{d}u = f(x)$, unde $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4}, & x = \pi \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$

⌈ **R**: $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x) \cos ux \, \mathrm{d}x = \dfrac{u}{1-u^2} \sin \pi u.$ ⌋

3° $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u) \cos ux \, \mathrm{d}u = f(x)$, unde $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0,1] \\ 0 & x \in (1,\infty). \end{cases}$

⌈ **R**: $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(x) \cos ux \, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1-\cos u}{u^2}.$ ⌋

Problema 2.4.24. Să determinăm soluţia problemei propagării căldurii într-o bară infinită, adică să determinăm funcţia $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ care satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x \in R, \; t \geqslant 0, \tag{2.65}$$

şi condiţia iniţială

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2.66}$$

în următoarele ipoteze

1) $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sunt funcţii din $L^1(\mathbb{R})$ pentru orice t,

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ are pe orice interval $[0, T]$ un majorant Φ integrabil adică, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant \Phi(x)$ iar $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \, \mathrm{d}x < \infty$.

⌈ **R**: Să considerăm transformata Fourier a funcţiei u relativ la variabila x, pentru orice $t \geqslant 0$, adică

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(x,t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

Transformatele Fourier ale derivatelor parţiale vor fi

$$\mathcal{F}[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}](\omega) = (\mathrm{i}\omega)^2 U(\omega, t), \qquad \mathcal{F}[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}](\omega) = \frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t}.$$

Dacă aplicăm transformata Fourier ecuaţiei (2.65) obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = -\omega^2 U(\omega,t) \tag{2.67}$$

care are soluţia

$$U(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Condiţia (2.66) se transformă în

$$U(\omega,0) = \mathcal{F}[u_0](\omega)$$

iar aceasta permite determinarea funcţiei C; $C(\omega) = \mathcal{F}[u_0](\omega)$. Astfel găsim

$$U(\omega,t) = \mathcal{F}[u_0](\omega)e^{-\omega^2 t}. \tag{2.68}$$

Dacă avem în vedere că $e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F}[\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}](\omega)$ iar un produs de transformate Fourier este transformata Fourier a unui produs de convoluţie obţinem soluţia

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} u_0(x-y)\,\mathrm{d}y. \rfloor$$

Problema 2.4.25. Folosind transformata Fourier prin sinus determinaţi funcţia $u = u(x,t)$ de clasă $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, unde $D = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, care satisface ecuaţia

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x,t) \tag{2.69}$$

şi condiţiile

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0 \\ u(0,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.70}$$

$\lceil$ **R**:

$$\mathcal{F}_s[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin x\omega\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_s[u(x,t)](\omega).$$

$$\mathcal{F}_s[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin x\omega\,\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\sin x\omega\Big|_0^{\infty} - \omega\int_0^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\cos x\omega\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\left(u(x,t)\cos x\omega\,\Big|_0^{\infty}+\omega\int_0^{\infty}u(x,t)\sin x\omega\,\mathrm{d}x\right).$$

Deci $\mathcal{F}_s[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)](\omega)=-\omega^2\mathcal{F}_s[u(x,t)](\omega)$.
Dacă notăm $U(\omega,t)=\mathcal{F}_s[u(x,t)](\omega)$ prin aplicarea transformatei sinus în ecuaţia dată rezultă următoarea ecuaţie diferenţială liniară cu parametrul ω

$$\frac{\partial U}{\partial t}+a^2\omega^2 U=-\mathcal{F}_s[\varphi(x,t)]. \tag{2.71}$$

Soluţia ecuaţiei omogene este

$$U_0(\omega,t)=C_0(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Soluţia particulară o găsim prin metoda variaţiei constantelor. Căutăm soluţia de forma $U_p(\omega,t)=C(\omega,t)e^{-a^2\omega^2 t}$ şi impunând condiţia, găsim

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-e^{a^2\omega^2 t}\mathcal{F}_s[\varphi(x,t)](\omega),$$

de unde $C(\omega,t)=-\displaystyle\int_0^t e^{a^2\omega^2 u}\mathcal{F}_s[\varphi(x,u)](\omega)\,\mathrm{d}u$. Soluţia ecuaţiei (2.71) este atunci

$$U(\omega,t)=U_0+U_p=\left(C_0(\omega)-\int_0^t e^{a^2\omega^2 u}\mathcal{F}_s[\varphi(x,u)](\omega)\,\mathrm{d}u\right)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Din $U(\omega,0)=0$ deducem $C_0(\omega)=0$ şi atunci $U(\omega,t)$ rezultă a fi de forma $U(\omega,t)=-e^{-a^2\omega^2 t}\displaystyle\int_0^t e^{a^2\omega^2 u}\mathcal{F}_s[\varphi(x,u)]\,\mathrm{d}u$, de unde deducem

$$u(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\int_0^t e^{a^2\omega^2 u}\mathcal{F}_s[\varphi(x,u)]\,\mathrm{d}u\right)e^{-a^2\omega^2 t}\sin\omega x\,d\omega.\ \rfloor$$

Problema 2.4.26. Aplicând transformata Fourier cosinus determinaţi soluţia problemei

$$\begin{cases} a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0\\ u(x,0)=0,\ x\geqslant 0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=-\mu,\quad \mu\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{2.72}$$

$\lceil$ **R**: Procedând ca în exerciţiul precedent, prin aplicarea transformatei Fourier prin cosinus se obţine ecuaţia liniară în $U(\omega,t)=\mathcal{F}_c[u(x,t)](\omega)$,

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a^2\mu-a^2\omega^2 U(\omega,t),$$

de unde $U(\omega, t) = C(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}$. Deoarece $U(\omega, 0) = 0$, rezultă că soluţia generală coincide cu cea particulară, determinată de exemplu prin metoda variaţiei constantelor. Obţinem

$$U(\omega, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\omega^2}(1 - e^{-a^2\omega^2 t}).$$

Aplicând transformarea inversă găsim

$$u(x, t) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-a^2\omega^2 t}}{\omega^2} \cos \omega x \, \mathrm{d}\omega. \rfloor$$

Problema 2.4.27. Folosind transformarea Fourier, să se rezolve ecuaţia $t^n T = 0$ în clasa $\mathcal{S}'$.

$\lceil$ **R**: Aplicăm transformata Fourier şi obţinem $\mathcal{F}^{(n)}[T] = 0$. Această ecuaţie în distribuţii are soluţia $\mathcal{F}[T] = c_0 + c_1\omega + \cdots + c_{n-1}\omega^{n-1}$, de unde prin inversare găsim $T = c_0\delta + c_1\delta' + \cdots + c_{n-1}\delta^{(n-1)}$.$\rfloor$

Capitolul 3

Transformarea Laplace

3.1 Transformarea Laplace

În fizică şi în diferite domenii tehnice se foloseşte adeseori o corespondenţă între două mulţimi de funcţii: o primă mulţime numită clasa originalelor şi o a doua mulţime formată cu imaginile lor obţinute printr-o anumită transformare. Această corespondenţă prezintă interes dacă este biunivocă şi dacă unor operaţii din prima mulţime le corespund în a doua mulţime operaţii mai simple.

Definiţia 3.1.1. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dacă are sens integrala improprie cu parametrul $p \in \mathbb{C}$*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} \, \mathrm{d}t \tag{3.1}$$

atunci F se numeşte transformata Laplace *a funcţiei f şi se notează cu $\mathcal{L}[f(t)](p)$.*

Aplicaţia 3.1.1. Pornind de la definiţie, să se calculeze transformatele Laplace ale funcţiilor

1) $f(t) = a \in \mathbb{C}$

2) $f(t) = t^k, k > -1$.

1. Conform definiţiei, avem:

$$\mathcal{L}[a](p) = \int_0^\infty a e^{-pt} \, \mathrm{d}t = a \int_0^\infty e^{-pt} \, \mathrm{d}t = a\frac{e^{-pt}}{-p}|_0^\infty = \frac{a}{p}. \tag{3.2}$$

2) $\mathcal{L}[t^k](p) = \displaystyle\int_0^\infty t^k e^{-pt} \, \mathrm{d}t$, se face schimbarea de variabilă $x = pt$ şi se obţine:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{p}\right)^k e^{-x}\frac{dx}{p} = \frac{1}{p^{k+1}}\int_0^\infty x^{k+1-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}.$$

Definiţia 3.1.2. *Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se numeşte* funcţie original *dacă satisface condiţiile:*

a) $f(t)=0$ pentru $t<0$ (adică mărimea fizică este studiată pentru $t\geqslant 0$, în rest este nulă sau fără interes);

b) f este continuă pe porţiuni (adică pentru $t\geqslant 0$ este continuă cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile de puncte, în care are discontinuităţi de speţa întâi);

c) $|f(t)e^{-at}|\leqslant M$, pentru $M>0, t>0$, unde $a, M\in\mathbb{R}$ (adică f are o creştere exponenţială, a numindu-se indicele de creştere al funcţiei original).

Observaţia 3.1.1. Condiţia de creştere exponenţială ($p=\sigma+i\tau$) se scrie sub forma :

$$|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t| \leqslant \int_0^\infty |f(t)||e^{-pt}|\ \mathrm{d}t \leqslant M\int_0^\infty e^{at}e^{-\sigma t}\ \mathrm{d}t =$$

$$= M\frac{e^{(a-\sigma)t}}{(a-\sigma)}|_0^\infty = \frac{M}{(\sigma-a)}$$

ultima integrală fiind convergentă pentru Re $(p)=\sigma>a$.

În baza criteriului comparaţiei pentru integrale improprii, va rezulta convergenţa absolută şi uniformă a integralei care defineşte pe $\mathcal{L}[f(t)](p)$.

Aplicaţia 3.1.2. Cea mai simplă funcţie original este funcţia unitate Heaviside $f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/2 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$. Alte exemple de funcţii original: funcţia constantă, funcţia putere, funcţia exponenţială, funcţiile circulare şi hiperbolice.

Aplicaţia 3.1.3. Funcţia $f(t)=e^{t^2}$ nu are creştere exponenţială pentru că $e^{t^2}e^{-at}$ este nemărginită pentru $t\to\pm\infty$, $\forall a$, deci nu poate fi considerată funcţie original.

Aplicaţia 3.1.4. Funcţia $f(t)=e^{bt}$, cu $b\in\mathbb{C}$ are creştere exponenţială, deoarece se poate alege $a=\mathrm{Re}\ b, M\geqslant 1 \Rightarrow\quad |f(t)e^{-at}| = e^{\mathrm{Re}(b)t}e^{-at}=1\leqslant M, \forall t\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}[e^{bt}](p) = \int_0^\infty e^{bt}e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(b-p)t}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{(b-p)t}}{p-b}|_0^\infty = \frac{1}{p-b} \tag{3.3}$$

ceea ce înseamnă că imaginea funcţiei e^{bt} este $\dfrac{1}{p-b}$, pentru Re $p>$ Re b.

Cu funcţiile original se pot face următoarele operaţii:

- suma a două funcţii original este tot o funcţie original;
- produsul dintre o funcţie original şi o constantă complexă este de asemenea o funcţie original;
- produsul a două funcţii original este tot o funcţie original.

Definiţia 3.1.3. *Transformata Laplace a unei funcţii original (care există) se numeşte* funcţie imagine.

În acest mod s-a definit o corespondenţă între două mulţimi: una numită clasa originalelor şi o a doua formată cu imaginile lor obţinute printr-o anumită transformare, numită *transformare Laplace*.

3.1.1 Proprietăţi ale transformării Laplace

Teorema 3.1.1 (liniaritatea). *Dacă $f_1(t), f_2(t), t \in \mathbb{R}$ sunt două funcţii original, atunci $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ are loc relaţia:*

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](p) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](p) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](p). \tag{3.4}$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](p) = \int_0^\infty (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) e^{-pt} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty c_1 f_1(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t + \int_0^\infty c_2 f_2(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)](p) + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)](p).$$

■

Aplicaţia 3.1.5. Folosind proprietatea de liniaritate, să se calculeze transformatele Laplace ale funcţiilor

1. $f(t) = \mathrm{sh}(at), a \in \mathbb{C}$
2. $f(t) = \mathrm{ch}(at), a \in \mathbb{C}$
3. $f(t) = \sin(at), a \in \mathbb{C}$
4. $f(t) = \cos(at), a \in \mathbb{C}$.

Transformatele Laplace se calculează pornind de la expresiile funcţiilor respective, cărora li se aplică proprietatea de liniaritate:

1)

$$\mathcal{L}[\mathrm{sh}(at)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{at}](p) - \mathcal{L}[e^{-at}](p)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}) = \frac{a}{p^2 - a^2}.$$

2.

$$\mathcal{L}[\mathrm{ch}(at)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{at}](p) + \mathcal{L}[e^{-at}](p)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}) = \frac{p}{p^2-a^2}.$$

3.

$$\mathcal{L}[\sin(at)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\mathrm{i}at}-e^{-\mathrm{i}at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{\mathrm{i}at}](p) - \mathcal{L}[e^{-\mathrm{i}at}](p)) =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{1}{p-\mathrm{i}a} - \frac{1}{p+\mathrm{i}a}) = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

4.

$$\mathcal{L}[\cos(at)](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\mathrm{i}at}+e^{-\mathrm{i}at}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{\mathrm{i}at}](p) + \mathcal{L}[e^{-\mathrm{i}at}](p)) =$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{1}{p-\mathrm{i}a} + \frac{1}{p+\mathrm{i}a}) = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

Teorema 3.1.2 (asemănare). *Dacă $f(t), t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, a>0$ are loc relaţia :*

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\frac{p}{a}). \tag{3.5}$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Prin schimbarea de variabilă $at = u$ avem

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \int_0^\infty f(u)e^{-p\frac{u}{a}}\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\frac{p}{a}).$$

Aplicaţia 3.1.6. Folosind teorema asemănării şi ştiind că

$$\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2+1}, \qquad \mathcal{L}[\cos t](p) = \frac{p}{p^2+1}$$

să se calculeze transformatele Laplace ale funcţiilor:

1) $f(t) = \sin 2t$

2) $f(t) = \cos 3t$.

1)

$$\mathcal{L}[\sin 2t](p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin t]\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{2}{p^2+4}.$$

2)

$$\mathcal{L}[\cos 3t](p) = \frac{1}{3}\mathcal{L}[\cos t]\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{p}{p^2+9}.$$

Teorema 3.1.3 (întârziere). *Dacă $f(t), t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci oricare ar fi $a \in \mathbb{R}, a>0$ are loc relaţia :*

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = e^{-pa}\mathcal{L}[f(t)](p). \tag{3.6}$$

Demonstraţie. Are loc

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = \int_0^\infty f(t-a)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_{-a}^\infty f(u)e^{-p(u+a)}\ \mathrm{d}u,$$

prin schimbarea $t-a=u$. Deoarece f este funcţie original deducem

$$\int_0^\infty f(u)e^{-p(u+a)}\ \mathrm{d}u = e^{-pa}\int_0^\infty f(u)e^{-pu}\ \mathrm{d}u = e^{-pa}\mathcal{L}[f(t)](p).$$

■

Aplicaţia 3.1.7. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei:

$$f(t) = \mathrm{ch}(\mathrm{t}-2).$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{ch}(\mathrm{t}-2)](\mathrm{p}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}\mathcal{L}[\mathrm{cht}](\mathrm{p}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{p}-1}+\frac{1}{\mathrm{p}+1}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}}{\mathrm{p}^2-1}.$$

Teorema 3.1.4 (deplasare). *Dacă $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci oricare ar fi $a \in \mathbb{C}$ are loc relaţia :*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p-a). \tag{3.7}$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](p) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}f(t)\ \mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t)](p-a).$$

■

Aplicaţia 3.1..8 Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei

$$f(t) = e^{2t}\cos 3t + e^{3t}\sin 2t$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t + e^{3t}\sin 2t] = \mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t] + \mathcal{L}[e^{3t}\sin 2t]$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \left(\frac{p}{p^2+9}\right)(p-2) + \left(\frac{2}{p^2+4}\right)(p-3) =$$
$$= \frac{p-2}{(p-2)^2+9} + \frac{2}{(p-3)^2+4} = \frac{p-2}{p^2-4p+13} + \frac{2}{p^2-6p+13}.$$

Teorema 3.1.5 (derivarea originalului). *Dacă $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original şi $f'(t)$ există şi este funcţie original, atunci are loc relaţia :*

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+). \tag{3.8}$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\ \mathrm{d}t = e^{-pt} f(t)|_0^\infty - \int_0^\infty (-p) e^{-pt} f(t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) - e^{-0.p} f(0+) + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ \mathrm{d}t = p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+)$$

deoarece:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)||e^{-pt}| \leqslant Me^{-\sigma t} e^{at} = Me^{-(\sigma - a)t}$$

iar pentru $\sigma := Re\ p > a$ se obţine

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)e^{-pt}| = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{t\to\infty} f(t)e^{-pt} = 0.$$

■

În general, dacă $f(t)$ admite derivate de ordin n şi toate sunt funcţii original, atunci:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

Demonstraţia se face folosind metoda inducţiei. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$, ceea ce înseamnă că

$$\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](p) = p^{n-1} \mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-2} f(0+) - p^{n-3} f'(0+) - \cdots - f^{(n-2)}(0+).$$

Dar

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \mathcal{L}[(f^{(n-1)}(t))'] = p\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)] - f^{(n-1)}(0+).$$

Înlocuim în expresia lui $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ pe $\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)]$ presupusă adevărată şi se obţine:

$$\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](p) = p[p^{n-1} \mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-2} f(0+) - p^{n-3} f'(0+) - \cdots - f^{(n-2)}(0+)] -$$

$$- f^{(n-1)}(0+)$$

sau

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

Teorema 3.1.6 (derivarea imaginii). *Dacă $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci*

$$\mathcal{L}[tf(t)](p) = -\left(\mathcal{L}[f(t)](p)\right)'. \tag{3.9}$$

În general

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](p) = (-1)^n \left(\mathcal{L}[f(t)](p)\right)^{(n)} \tag{3.10}$$

pentru orice $n \geqslant 1$.

Demonstraţie.

$$(\mathcal{L}[f(t)](p))' = \int_0^\infty (e^{-pt} f(t))' \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty -tf(t)e^{-pt} \, \mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt} \, \mathrm{d}t = -\mathcal{L}[tf(t)](p)$$

$$(\mathcal{L}[f(t)](p))'' = \int_0^\infty (-t)^2 e^{-pt} f(t) \, \mathrm{d}t = (-1)^2 \int_0^\infty t^2 e^{-pt} f(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= (-1)^2 \mathcal{L}[t^2 f(t)](p).$$

Pentru derivata de ordinul n se obţine:

$$(\mathcal{L}[f(t)](p))^{(n)} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t =$$

$$= (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](p).$$

■

Aplicaţia 3.1.9. Să se calculeze transformatele Laplace ale funcţiilor:

1) $f(t) = t^2 e^{5t}$

2) $f(t) = t \cos 3t$

3) $f(t) = t^n e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$.

1)

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[t^2 e^{5t}](p) = (-1)^2 (\mathcal{L}[e^{5t}](p))'' = \left(\frac{1}{p-5}\right)'' = \frac{2}{(p-5)^3}.$$

2)

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[t \cos 3t](p) = -(\mathcal{L}[\cos 3t](p))' = -\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

3)

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}](p) = (-1)^n (\mathcal{L}[e^{at}](p))^{(n)} = (-1)^n \left(\frac{1}{p-a}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Teorema 3.1.7 (integrarea originalului). *Dacă $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)](p) \tag{3.11}$$

şi

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathrm{d}u_n \int_0^{u_n} \mathrm{d}u_{n-1} \ldots \int_0^{u_3} \mathrm{d}u_2 \int_0^{u_2} f(u_1)\ \mathrm{d}u_1\right] = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}[f(t)](p). \tag{3.12}$$

Demonstraţie. Notăm $h(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u$ şi se observă că $h'(t) = f(t)$, $h(0) = 0$. Aplicând propoziţia 5 se obţine :

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[h'(t)](p) = p\mathcal{L}[h(t)](p) - h(0)$$

sau

$$\mathcal{L}[h(t)](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)](p)$$

de unde rezultă că

$$\mathcal{L}[h(t)](p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\ \mathrm{d}u\right](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(t)](p).$$

Presupunând proprietatea adevărată pentru $n-1$ şi notând

$$h(u_n) = \int_0^{u_n} \mathrm{d}u_{n-1} \ldots \int_0^{u_3} \mathrm{d}u_2 \int_0^{u_2} f(u_1)\ \mathrm{d}u_1$$

obţinem:

$$\mathcal{L}[h(u_n)](p) = \int_0^\infty e^{-pu_n} h(u_n)\ \mathrm{d}u_n = \frac{1}{p^{n-1}}\mathcal{L}[f(t)](p)$$

şi

$$\mathcal{L}\left[\int h(u_n)\mathrm{d}u_n\right] = \frac{\mathcal{L}[h(u_n)](p)}{p} = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}[f(t)](p).$$

■

Aplicaţia 3.1.10. Să se calculeze următoarele transformate Laplace:

1)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin 3u\ \mathrm{d}u\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[\sin 3t](p) = \frac{3}{p(p^2+9)}.$$

2)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u^2 e^{-3u}\mathrm{d}u\right] = \frac{1}{p^2}\mathcal{L}[t^2 e^{-3t}](p) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{p+3}\right)'' = \frac{2}{p^2(p+3)^3}.$$

Teorema 3.1.8 (integrarea imaginii). *Dacă $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ este o funcţie original, atunci dacă integrala este convergentă*

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^\infty \mathcal{L}[f(t)](q)\ \mathrm{d}q. \qquad (3.13)$$

În particular, pentru $p = 0$ se obţine

$$\int_0^\infty \mathcal{L}[f(t)](q)\ \mathrm{d}q = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](0) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Fie $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$ şi $G(p) = \displaystyle\int_p^\infty F(q)\ \mathrm{d}q$ atunci

$$G(p) = \lim_{r\to\infty} \int_p^r F(q)\ \mathrm{d}q = \lim_{r\to\infty} H(r) - H(p).$$

De aici rezultă că $G'(p) = -F(p)$ sau $-G'(p) = F(p)$. Fie $g(t)$ originalul funcţiei $G(p)$, ceea ce înseamnă că $G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p)$. Ţinând seama că

$$\mathcal{L}[tg(t)](p) = -G'(p),\ F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) \text{ şi } -G'(p) = F(p)$$

rezultă

$$-tg(t) = -f(t) \text{ sau } g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

şi se obţine

$$G(p) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p).$$

■

Aplicaţia 3.1.11. Să se calculeze transformatele următoarelor funcţii:

1) $f(t) = \dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$

2) $f(t) = \dfrac{\cos 2t - \cos 3t}{t}$

3) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

1)

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}\right] = \int_p^\infty \mathcal{L}[e^{-2t} - e^{-3t}](q)\ \mathrm{d}q = \int_p^\infty \left(\frac{1}{q+2} - \frac{1}{q+3}\right)\ \mathrm{d}q =$$

$$= \ln\frac{p+3}{p+2}.$$

2)

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos 2t - \cos 3t}{t}\right](p) = \int_p^\infty \mathcal{L}[\cos 2t - \cos 3t](q)dq =$$

$$= \int_p^\infty \left(\frac{q}{q^2+4} - \frac{q}{q^2+9} \right) \mathrm{d}q = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+9}{p^2+4}.$$

3)

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](p) = \int_p^\infty \mathcal{L}[\sin t](q)\ \mathrm{d}q = \int_p^\infty \frac{1}{q^2+1}\ \mathrm{d}q = \mathrm{arctg}\ q|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\ p.$$

Aplicaţia 3.1.12. Să se calculeze integrala: $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t.$

Aplicăm teorema integrării imaginii pentru cazul $p = 0$ şi avem:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty L[\sin t](p)\ \mathrm{d}p = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\ \mathrm{d}p = \mathrm{arctg}\,|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Teorema 3.1.9 (imaginea produsului de convoluţie). *Dacă $f(t)$ şi $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ sunt două funcţii original, atunci*

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p)\mathcal{L}[g(t)](p). \tag{3.14}$$

Demonstraţie. Notăm

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t \text{ şi } G(p) = \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\ \mathrm{d}t$$

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}G(p)\ \mathrm{d}t.$$

Avem

$$e^{-pt}G(p) = \mathcal{L}[g(\tau - t)](p) = \int_0^\infty g(\tau - t)e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau.$$

Prin înlocuire în relaţia de mai sus, se obţine

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty f(t)\ \mathrm{d}t \int_0^\infty g(\tau - t)e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau.$$

Se poate schimba ordinea de integrare şi avem

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau \int_0^\infty f(t)g(\tau - t)\ \mathrm{d}t.$$

$g(t)$ fiind funcţie original, avem $g(\tau - t) = 0$ pentru $\tau < t$ şi se obţine:

$$\int_0^\infty f(t)g(\tau - t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\tau f(t)g(\tau - t)\ \mathrm{d}t = (f * g)(\tau)$$

ceea ce înseamnă că

$$\int_0^\infty e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau \int_0^\infty f(t)g(\tau-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau \int_0^\tau f(t)g(\tau-t)\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau \int_0^\tau f(\tau-u)g(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^\infty (f*g)(\tau)e^{-p\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Deci

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty (f*g)(\tau)e^{-p\tau}\ \mathrm{d}\tau.$$

■

Aplicaţia 3.1.13. Să se calculeze:
1) $t * \sin t$
2) $\mathcal{L}[t * \sin t]$.
1)

$$t*\sin t = \int_0^t (t-u)\sin u\ \mathrm{d}u = t\int_0^t \sin u\ \mathrm{d}u - \int_0^t u\sin u \mathrm{d}u = t - \sin t$$

2)

$$\mathcal{L}[t*\sin t](p) = \mathcal{L}[t](p)\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

3.2 Calculul inversei transformării Laplace

În unele situaţii este utilă determinarea din formula

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\ \mathrm{d}t$$

a funcţiei $f(t)$. Pentru aceasta vor fi prezentate trei metode.

3.2.1 Utilizarea proprietăţii de liniaritate

Fie $F(p) = c_1F_1(p) + c_2F_2(p)$ unde $F_1(p)$ şi $F_2(p)$ sunt imaginile (transformatele) unor funcţii $f_1(t)$ respectiv $f_2(t)$, cunoscute.

Funcţia original $f(t)$ se obţine astfel: $f(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$. Deoarece

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)](p) = c_1\mathcal{L}[f_1(t)](p) + c_2\mathcal{L}[f_2(t)](p) =$$

$$= c_1F_1(p) + c_2F_2(p) = F(p).$$

Observaţia 3.2.1. Determinarea funcţiei original $f(t)$ când se cunoaşte imaginea sa $F(p)$ se poate face prin dezvoltarea expresiei funcţiei în fracţii simple şi recunoaşterea transformatelor uzuale.

Aplicaţia 3.2.1. Determinaţi funcţia original a imaginii

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4}.$$

Descompunem funcţia $F(p)$ în fracţii simple şi se obţine:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2\mathrm{i}} + \frac{1}{p+2\mathrm{i}}\right).$$

Se observă că $\frac{1}{p-2\mathrm{i}}$ este imaginea funcţiei $e^{2\mathrm{i}t}$, iar $\frac{1}{p+2\mathrm{i}}$ este imaginea funcţiei $e^{-2\mathrm{i}t}$. De aici rezultă că

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^{2\mathrm{i}t} + e^{-2\mathrm{i}t}) = \cos 2t.$$

3.2.2 Formula Mellin-Fourier

În condiţii destul de generale, relaţia :

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ \mathrm{d}t$$

ca ecuaţie integrală în funcţia necunoscută f (t) admite o soluţie unică.

Definiţia 3.2.1. *Se spune că funcţia $f(t)$ definită pe un interval $[a,b]$ este derivabilă pe porţiuni dacă există o diviziune*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

astfel încât $f(t)$ este derivabilă în fiecare interval (t_{i-1}, t_i) şi există limitele laterale $f(t_i - 0)$, $f(t_i + 0)$.

Teorema 3.2.1 (inversiune). *Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ îndeplineşte următoarele condiţii :*

a) $f(t) = 0$, $t \leqslant 0$

b) $f(t)$ este derivabilă pe porţiuni;

c) există s_0 real, $s_0 \geqslant 0$ astfel încât $|f(t)|e^{-s_0 t}$ este mărginită pentru $0 \leqslant t < \infty$

atunci, în punctele în care $f(t)$ este continuă, valorile ei sunt date de formula Mellin-Fourier *:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)e^{pt}\ \mathrm{d}p,\ \textit{pentru}\ p = \sigma + \mathrm{i}\tau\ \textit{şi}\ a > s_0 \tag{3.15}$$

unde $F(p)$ este transformarea Laplace a funcţiei $f(t)$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia: $\varphi(t) = e^{-at}f(t)$, $a \in \mathbb{R}$ care în punctele de discontinuitate ale lui $f(t)$ este de forma:

$$\varphi(t) = e^{-at}\frac{f(t+0)-f(t-0)}{2}.$$

Funcţia $\varphi(t) = e^{-at}f(t)$, $a \in \mathbb{R}$ îndeplineşte următoarele condiţii:

1) este derivabilă pe porţiuni;

2) are aceleaşi puncte de discontinuitate cu funcţia $f(t)$;

3) este integrabilă pentru $a>s_0$.

De aici rezultă că sunt îndeplinite condiţiile ca $\varphi(t)$ să fie reprezentată printr- o integrală Fourier:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)e^{-au}e^{\mathrm{i}\alpha(t-u)}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Se înmulţesc ambii membri cu e^{at} şi găsim

$$e^{at}\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)e^{-(a+\mathrm{i}\alpha)u}\,\mathrm{d}u\right)e^{(a+\mathrm{i}\alpha)t}\,d\alpha.$$

Notăm $p = a + \mathrm{i}\alpha$ şi obţinem:

$$e^{at}\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a-\infty}^{a+\infty}\left(\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}u\right)e^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

Ţinând seama că

$$\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}\,\mathrm{d}u = F(p) \text{ şi } f(t) = e^{at}\varphi(t)$$

rezultă:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)e^{pt}dp$$

şi teorema este demonstrată. ■

Observaţia 3.2.2. Integrala de mai sus se poate calcula cu ajutorul reziduurilor :

$$f(t) = \sum_k \mathrm{Rez}[e^{pt}F(p), p_k] \tag{3.16}$$

unde p_k sunt singularităţi ale lui $F(p)$ din semiplanul Re $p<a$.

Aplicaţia 3.2.2. Determinaţi funcţia original a imaginii

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4}. \tag{3.17}$$

Punctele singulare ale funcţiei $F(p)$ sunt $p_1 = -2i$, $p_2 = 2i$.

$$f(t) = \mathrm{Rez}\left(e^{pt}\frac{p}{p^2+4}, -2\mathrm{i}\right) + \mathrm{Rez}\left(e^{pt}\frac{p}{p^2+4}, 2\mathrm{i}\right) =$$

$$= \lim_{p\to-2\mathrm{i}}(p+2\mathrm{i})e^{pt}\frac{p}{(p-2\mathrm{i})(p+2\mathrm{i})} + \lim_{p\to2\mathrm{i}}(p-2\mathrm{i})e^{pt}\frac{p}{(p-2\mathrm{i})(p+2\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{-2\mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}}}{-4\mathrm{i}} + \frac{2\mathrm{i}e^{2\mathrm{i}t}}{4\mathrm{i}} = \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{2} + \frac{e^{2\mathrm{i}t}}{2} = \cos 2t.$$

3.2.3 Formula lui Heaviside

Teorema 3.2.2. *Dacă* $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ *este o funcţie raţională, unde* P *şi* Q *sunt două polinoame care îndeplinesc următoarele condiţii:*

1) grad$P<$*grad*Q *;*

2) Q *are rădăcinile simple diferite de zero* p_1 , p_2 , …, p_n , *atunci* $F(p)$ *este imaginea funcţiei* $f(t)$ *dată de formula :*

$$f(t) = \sum_{;=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{3.18}$$

Demonstraţie. $F(p)$ poate fi descompusă în fracţii simple, astfel:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{p-p_k}.$$

Pentru calculul coeficienţilor a_k unde $k = 1, 2, \ldots, n$ se consideră cercurile γ_k , $k = 1, 2, \ldots, n$ cu centrele în punctele p_k , $k = 1, 2, \ldots, n$, de raze r_k , $k = 1, 2, \ldots, n$ suficient de mici astfel încât în fiecare disc închis $\Delta_k(p_k, r_k)$ $k = 1, 2, \ldots, n$ să nu se găsească alt pol al funcţiei $F(p)$ în afară de p_k , $k = 1, 2, \ldots, n$. Întegrând, se obţine:

$$\int_\gamma F(p)\ \mathrm{d}p = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{\gamma_k} \frac{\mathrm{d}p}{p-p_k}.$$

Din proprietăţile integralei complexe se ştie că

$$\int_{\gamma_k} \frac{\mathrm{d}p}{p-p_k} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Din teorema reziduurilor pentru un pol simplu rezultă

$$\int_\gamma F(p)dp = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(F(p), p_k) = 2\pi\mathrm{i}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}.$$

Se observă că

$$a_k = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}$$

ceea ce înseamnă că $F(p)$ este de forma

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Ţinînd seama de faptul că $\mathcal{L}[e^{p_k t}] = \dfrac{1}{p - p_k}$ şi de proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace, avem

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \mathcal{L}[e^{p_k t}] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k i t}\right].$$

De unde rezultă că

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.$$

■

Aplicaţia 3.2.3. Determinaţi funcţia original $f(t)$ a imaginii

$$F(p) = \frac{p^2 + 5}{(p-1)(p^2+4)}.$$

Se observă că

$$P(p) = p^2 + 5,\ Q(p) = (p-1)(p^2+4),\ Q'(p) = 3p^2 - 2p + 4.$$

Rădăcinile lui $Q(p) = 0$ sunt $p_1 = 1$, $p_2 = -2\mathrm{i}$, $p_3 = 2\mathrm{i}$. Conform teoremei 2.2.2 se obţine:

$$f(t) = \frac{6e^t}{5} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{8 - 4\mathrm{i}} - \frac{e^{2\mathrm{i}t}}{8 + 4\mathrm{i}}.$$

Corolarul 3.2.1 (formula lui Heaviside). *Dacă una din rădăcinile simple este nulă, adică $Q(p) = pC(p)$ şi atunci*

$$Q'(p) = C(p) + pC'(p)$$

iar

$$Q'(0) = 0 \text{ şi } Q'(p_k) = p_k C'(p_k), k = 2, 3, \ldots, n$$

de unde rezultă că

$$f(t) = \frac{P(0)}{C(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{P(p_k)}{p_k C'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{3.19}$$

Aplicaţia 3.2.4. Determinaţi funcţia original a imaginii

$$F(p) = \frac{3p-1}{p(p^2-4)}$$

Se observă că

$$P(p) = 3p-1,\ Q(p) = p(p^2-4),\ C(p) = p^2-4,\ C'(p) = 2p$$

Rădăcinile lui $Q(p) = 0$ sunt $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $p_3 = 2$. Conform consecinţei, se obţine:

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{7e^{-2t}}{4} + \frac{5e^{2t}}{4}.$$

Teorema 3.2.3. *Dacă* $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ *este o funcţie raţională, unde* P *şi* Q *sunt două polinoame care îndeplinesc următoarele condiţii:*

1) $gradP<gradQ-2$ *;*

2) Q *are rădăcinile* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *, cu ordinele de multiplicitate* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *atunci originalul funcţiei* $F(p)$ *se poate determina direct cu formula:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}(F(p)e^{pt}, p_k). \tag{3.20}$$

Aplicaţia 3.2.5. Determinaţi funcţia original a imaginii $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2(p-2)^3}$.

$$f(t) = \mathrm{Rez}\left(\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}, 0\right) + \mathrm{Rez}\left(\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}, 2\right)$$

$$\mathrm{Rez}\left(\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}, 0\right) = \lim_{p\to 0}\left(p^2\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}\right)' =$$

$$= \lim_{p\to 0}\left[-\frac{2p+5}{(p-2)^4} + \frac{p+1}{(p-2)^3}t\right] = -\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} - t\right)$$

$$\mathrm{Rez}\left(\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}, 2\right) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 2}\left[(p-2)^3\frac{p+1}{p^2(p-2)^3}e^{pt}, 2\right]'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\left[(-\frac{p+2}{p^3} - \frac{p+1}{p^2}t)e^{pt}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\left[\frac{2p+6}{4} - \frac{p+2}{p^3}t + \left(-\frac{p+2}{p^3} + \frac{p+1}{p^2}t\right)te^t\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}t^2\right)e^{2t}$$

$$f(t) = -\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} - t\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} - t + \frac{3}{2}t^2\right)e^{2t}.$$

3.3 Aplicaţii ale transformării Laplace

3.3.1 Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii / sisteme de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Fie ecuaţia:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t) \tag{3.21}$$

cu condiţiile iniţiale:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{3.22}$$

Se cere determinarea funcţiei necunoscute $x = x(t)$, $t>0$, de clasă $C^n[0, \infty]$, care să fie soluţie a ecuaţiei diferenţiale şi să satisfacă condiţiile iniţiale.

Problema astfel formulată reprezintă o problemă Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de mai sus.

În ipoteza că că $f(t)$ este definită pe $[0, \infty)$ şi are imagine, aplicând transformarea Laplace se obţine :

$$\mathcal{L}[x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x](p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$$

sau

$$\mathcal{L}[x^{(n)}](p) + a_1 \mathcal{L}[x^{(n-1)}](p) + \cdots + a_n \mathcal{L}[x](p) = \mathcal{L}[f(t)](p).$$

Aplicând propoziţia 5 se obţine:

$$\mathcal{L}[x^{(n)}](p) = p^n \mathcal{L}[x](p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)$$

....

$$\mathcal{L}[x^{(k)}](p) = p^k \mathcal{L}[x](p) - p^{k-1}x(0) - p^{k-2}x'(0) - \cdots - x^{(k-1)}(0)$$

....

$$\mathcal{L}[x'](p) = p\mathcal{L}[x](p) - x(0).$$

Notând

$$\mathcal{L}[x](p) = X \text{ şi } \mathcal{L}[f(t)](p) = F(p)$$

se obţine: $X(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) -$

$$-x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + \cdots + x_{n-2}(p + a_1) - x_{n-1} = F(p).$$

Cu notaţiile:

$$P(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$Q(p) = x_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + \cdots + x_{n-1}$$

relaţia de mai sus devine:

$$\overline{x}P(p) - Q(p) = F(p)$$

de unde

$$\overline{x} = \frac{1}{P(p)}[F(p) + Q(p)]$$

Soluţia ecuaţiei este

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{x}](p),\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(p) + Q(p)}{P(p)}\right](p). \tag{3.23}$$

Aplicaţia 3.3.1. Să se rezolve ecuaţia :

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^t$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

Aplicăm transformata Laplace ambilor membri şi se obţine

$$\mathcal{L}[x''(t) - 5x'(t) + 6x(t)](p) = \mathcal{L}[e^t](p).$$

Aplicăm teorema 2.1.1 privind liniaritatea

$$\mathcal{L}[x''(t)](p) - 5\mathcal{L}[x'(t)](p) + 6\mathcal{L}[x(t)](p) = \mathcal{L}[e^t](p).$$

Calculăm transformatele

$$\mathcal{L}[x''(t)](p) = p^2\mathcal{L}[x(t)](p) - px(0) - x'(0) = p^2\mathcal{L}[x(t)](p) + p - 1.$$

$$\mathcal{L}[x'(t)](p) = p\mathcal{L}[x(t)](p) - x(0) = p\mathcal{L}[x(t)](p) + 1.$$

$$\mathcal{L}[e^t](p) = \frac{1}{p-1}$$

Înlocuim transformatele în ecuaţie şi se obţine:

$$\mathcal{L}[x(t)](p)(p^2 - 5p + 5] = p - 6 + \frac{1}{p-1}$$

sau

$$\mathcal{L}[x(t)](p) = \frac{p^2 - 7p + 7}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Prin descompunere în fracţii simple, găsim:

$$\mathcal{L}[x(t)](p) = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{5}{p-2} + \frac{7}{2(p-3)}.$$

Aplicând proprietatea de liniaritate pentru calculul inversei transformatei Laplace, se obţine soluţia ecuaţiei:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - 5e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}.$$

Aplicaţia 3.3.2. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) & = & 0 \\ x''(t) + 2y'(t) & = & 2t - \cos 2t \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $y(0) = -1$.

Se aplică transformarea Laplace ambilor membri ai fiecărei ecuaţii:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'(t)](p) - \mathcal{L}[x(t)](p) + 2\mathcal{L}[y(t)](p) & = & 0 \\ \\ \mathcal{L}(x''(t)](p) + 2\mathcal{L}[y'(t)](p) & = & \mathcal{L}[2t - \cos 2t](p) \end{cases}$$

prin înlocuire, se obţine:

$$\begin{cases} p\mathcal{L}[x(t)](p) - x(0) - \mathcal{L}[x(t)](p) + 2\mathcal{L}[y(t)](p) & = & 0 \\ \\ p^2\mathcal{L}[x(t)](p) - px(0) - x'(0) + 2p\mathcal{L}[y(t)](p) - 2y(0) & = & \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{p}{p^2+4} \end{cases}$$

care se mai poate scrie

$$\begin{cases} (p+1)\mathcal{L}[x(t)](p) + 2\mathcal{L}[y(t)](p) & = & 0 \\ \\ p^2\mathcal{L}[x(t)](p) + 2p\mathcal{L}[y(t)](p) & = & \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{p}{p^2+4}. \end{cases}$$

De aici găsim :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x(t)](p) & = & -\dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p^2+4} \\ \\ \mathcal{L}[y(t)](p) & = & \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p^3} - \dfrac{p}{2(p^2+4)} - \dfrac{2}{4(p^2+4)}. \end{cases}$$

Soluţiile sistemului sunt :

$$\begin{cases} x(t) & = & -t^2 + \frac{1}{2}\sin 2t \\ \\ y(t) & = & t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t. \end{cases}$$

3.3.2 Rezolvarea ecuaţiilor integrale de tip Volterra

Definiţia 3.3.1. *O ecuaţie în necunoscuta $y(t)$ de forma :*

$$x(t) + \int_0^t k(t-u)x(u)\ \mathrm{d}u = f(t) \tag{3.24}$$

unde $k(t)$ şi $f(t)$ sunt funcţii date, se numeşte ecuaţie integrală de tip Volterra.

Notând :

$$\mathcal{L}[x(t)](p) = X(p),\ \mathcal{L}[k(t)](p) = K(p),\ \mathcal{L}[f(t)](p) = F(p)$$

şi aplicând ecuaţiei Propoziţia 9, se obţine :

$$X(p) + K(p)Y(p) = F(p)$$

de unde rezultă că

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 + K(p)}$$

ceea ce înseamnă că

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(p)).$$

Aplicaţia 3.3.3. Să se rezolve ecuaţia integrală de tip Volterra :

$$x(t) + \int_0^t e^{t-u}x(u)\ \mathrm{d}u = \cos 2t.$$

Aplicăm transformata Laplace ambilor membri :

$$\mathcal{L}[x(t)](p) + \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-u}x(u)\ \mathrm{d}u\right](p) = \mathcal{L}[\cos 2t](p).$$

Dacă notăm $\mathcal{L}[x(t)](p) = X(p)$, se obţine

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-u}x(u)\ \mathrm{d}u\right](p) = \mathcal{L}[e^t](p)\mathcal{L}[x(t)](p) = \frac{1}{p-1}X(p)$$

şi ecuaţia devine

$$X(p) + \frac{1}{p-1}X(p) = \frac{p}{p^2+4}$$

de unde găsim

$$X(p) = \frac{p-1}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{p^2+4}.$$

Aplicând proprietatea de liniaritate pentru calculul inversei transformatei Laplace, se obţine soluţia ecuaţiei:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(p)](t) = \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t.$$

3.3.3 Studiul circuitului R.L.C.

Considerăm un circuit electric care are legate în serie un rezistor (având ca parametru rezistenţa R), o bobină (cu inductanţa L) şi un condensator (cu capacitatea C).

Notăm cu $q(t)$ sarcina variabilă pozitivă de pe placa condensatorului şi cu $E(t)$ tensiunea cu care se alimentează circuitul. Datorită alimentării în circuit apare un curent de intensitate variabilă $i(t)$ şi conform legilor lui Kirchhoff, circuitului R.L.C. îi corespunde ecuaţia:

$$E(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C}.$$

Ţinând seama de faptul că $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ ecuaţia de mai sus devine:

$$E(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\ \mathrm{d}\tau,\ t>0$$

care este o ecuaţie integrală în necunoscuta $i(t)$. Această ecuaţie poate fi transformată într-o ecuaţie diferenţială de ordinul doi în raport cu sarcina $q(t)$, astfel:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E(t)$$

cu condiţiile iniţiale: $q(0) = q_0$, $\dfrac{dq}{dt}|_{t=0} = i(0) = i_0$.

Presupunând că $E(t)$, $q(t)$, $\dfrac{dq}{dt}$, $\dfrac{d^2q}{dt^2}$ sunt funcţii original, ecuaţia de mai sus se poate rezolva aplicând transformarea Laplace:

$$\mathcal{L}\left[L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}\right](p) = \mathcal{L}[E(t)](p).$$

Notăm: $\mathcal{L}[q(t)](p) = \overline{q}$, $\mathcal{L}[E(t)](p) = \overline{E}$ şi se obţine:

$$\overline{q}(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}) = \overline{E} + pLq_0 + Li_0 + q_0R$$

sau

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\overline{E} + pLq_0 + Li_0 + q_0R}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}\right).$$

3.4 Probleme

Problema 3.4.1. Să se calculeze următoarele transformate Laplace:

1° $\mathcal{L}\left[-\dfrac{3}{\sqrt{t}}\right]$ ⌈ **R**: $-3\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$. ⌋

2° $\mathcal{L}[\sin t \cos t]$ ⌈ **R**: $\dfrac{1}{p^2+4}$. ⌋

3° $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-2t}-1}{t}\sin 3t\right]$ ⌈ **R**: arctg $\dfrac{6}{p^2+p+9}$. ⌋

4° Dacă $f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 2 \\ -1 & 2 \leqslant t < 4 \\ 0 & 4 \leqslant t \end{cases}$ calculaţi $\mathcal{L}[f(t)]$

⌈ **R**: $\dfrac{3-4e^{-2p}+e^{-4p}}{p}$. ⌋

5° $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t\right]$ ⌈ **R**: $\ln\dfrac{1+p^2}{2p}$. ⌋

Problema 3.4.2. Să se determine funcţiile original ale următoarelor imagini:

1° $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}$ ⌈ **R**: $f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$. ⌋

2° $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ ⌈ **R**: $f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$. ⌋

3° $F(p) = \dfrac{p^3+1}{p^4-8p}$ ⌈ **R**: $f(t) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-t}\cos\sqrt{3t}$. ⌋

Problema 3.4.3. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:

1° $x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 8te^{-t}$ cu condiţiile iniţiale $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1$, ⌈ **R**: $x(t) = e^{-2t} + 2te^{-t} + (t-1)e^t$. ⌋

2° $x'''(t) - 2x''(t) - x'(t) + 2x(t) = 5\sin 2t$ cunoscând condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$. ⌈ **R**: $x(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{5}{12}e^{2t} + \dfrac{1}{4}\cos 2t + \dfrac{1}{4}\sin 2t$. ⌋

Problema 3.4.4. Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale:

1° $\begin{cases} 2x'(t) - y(t) - y'(t) & = & 4(1-e^{-t}) \\ 2x'(t) + y(t) & = & 2(1+e^{-2t}) \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

⌈ **R**: $x(t) = 3 - 2e^{-t} - e^{-2t}$, $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$. ⌋

2° $\begin{cases} x'(t) + y(t) + z(t) &= 0 \\ y'(t) + x(t) + z(t) &= 0 \\ z'(t) + x(t) + y(t) &= 0 \end{cases}$ cu condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

⌈ **R**: $x(t) = e^t$, $y(t) = 0$, $z(t) = -e^t$. ⌋

Problema 3.4.5. Să se rezolve ecuaţiile integrale:

1° $x(t) - 2\int_0^t x(u)\ \mathrm{d}u = \dfrac{1-\cos 3t}{9}$.

⌈ **R**: $x(t) = \dfrac{1}{13}\left(e^{2t} + \cos 3t - \dfrac{2\sin 3t}{3}\right)$. ⌋

2° $x(t) - \int_0^t \operatorname{ch} 2(t-u)x(u)\ \mathrm{d}u = 4 - 4t - 8t^2$.

⌈ **R**: $x(t) = 4 - 2t^2$. ⌋

3° $x(t) = t\cos 3t + \int_0^t \sin 3(t-u)x(u)\ \mathrm{d}u$.

⌈ **R**: $x(t) = 2\sin 3t - \dfrac{5\sin\sqrt{6}t}{\sqrt{6}}$. ⌋

Problema 3.4.6. Să se rezolve ecuaţia integro-diferenţială :

$$x(t) + x'(t) - 2\int_0^t x(u)\sin(t-u)\ \mathrm{d}u = \cos t + \operatorname{sh} t$$

⌈ **R**: $x(t) = \operatorname{ch} t$. ⌋

Capitolul 4

Transformarea $\mathcal{Z}$

4.1 Proprietăţile transformării $\mathcal{Z}$

Transformata Laplace a unei funcţii original $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este definită de integrala improprie

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Prin analogie, pentru o funcţie $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ (sau un şir $(f(t)_{t\in\mathbb{N}})$ Z. Tzypkin a introdus *transformata Laplace discretă* sau *transformata Dirichlet* prin seria

$$\mathcal{D}[f(t)] = F(p) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-pt}.$$

Se obţine o formulă mai simplă cu ajutorul schimbării de variabilă $z = e^p$; dacă notăm cu $F^*(z)$ suma noii serii, rezultă o altă transformată, introdusă de W.Hurewicz în 1947:

$$F^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t},$$

care se va numi *transformata* $\mathcal{Z}$ a funcţiei discrete f. Aceasta justifică următoarele definiţii:

Definiţia 4.1.1. *O funcţie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se numeşte* funcţie original *dacă are proprietăţile:*

i) $f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$;

ii) $\exists M > 0,\quad R > 0$ *astfel încât* $|f(t)| \leqslant MR^t, \quad t = 0, 1, \ldots.$

Cel mai mic număr R cu această proprietate se notează R_f şi se numeşte raza de convergenţă *a transformatei funcţiei f.*

Funcţia f se mai numeşte şi semnalul în domeniul timp.

Definiţia 4.1.2. *Funcţia F^*, definită de egalitatea*

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}, \tag{4.1}$$

se numeşte transformata $\mathcal{Z}$ *a funcţiei original f. Funcţia F^* se mai numeşte şi imaginea funcţiei f sau semnalul în domeniul frecvenţă. Operatorul $\mathcal{Z}$ definit de formula (4.1), $f \overset{\mathcal{Z}}{\to} F^*$ se numeşte* transformarea $\mathcal{Z}$.

O alternativă (indicată de G. Doetsch în 1961) ar fi denumirea de transformare Laurent deoarece seria (4.1) este o serie Laurent în vecinătatea punctului de la infinit (care este punct singular aparent al funcţiei F^*) cu coeficienţii $c_t = f(t),\ t = 0, 1, 2, \ldots.$ Rezultă că teoria seriilor Laurent poate fi aplicată pentru a obţine proprietăţi şi tehnici ale transformării $\mathcal{Z}$.

Propoziţia 4.1.1. *Seria* (4.1) *este absolut convergentă pentru $|z| > R$ (în exteriorul discului de rază R centrat în origine), unde $R = R_f$. În orice regiune închisă $|z| \geqslant R' > R$ seria* (4.1) *este uniform convergentă.*

Demonstraţie. Se utilizează seria geometrică $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pentru $|z| < 1$.

Pentru $|z| > R$ avem $\dfrac{R}{|z|} < 1$, deci

$$\sum_{t=0}^{\infty} |f(t)||z^{-t}| \overset{\text{ii)}}{\leqslant} \sum_{t=0}^{\infty} MR^t|z^{-t}| = M\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{R}{|z|}\right)^t = M\frac{|z|}{|z|-R} < \infty.$$

Pentru $|z| \geqslant R' > R$ (fig. 4.1), se obţine $\left|f(t)z^{-t}\right| \leqslant M\left(\dfrac{R}{R'}\right)^t$.

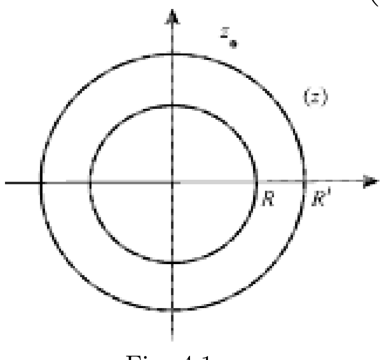


Fig. 4.1

Deoarece seria geometrică $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R'}\right)^t$, cu $\dfrac{R}{R'} < 1$, este convergentă şi seria cu termeni pozitivi $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} M\left(\frac{R}{R'}\right)^t$ este convergentă deci conform criteriului de comparaţie al lui Weierstrass seria (4.1) este uniform convergentă. ■

O consecinţă a acestei propozitii este faptul că funcţia $F^*(z)$ este analitică pe domeniul $|z| > R$. Singularitătţiile funcţiei $F^*(z)$ se află în discul $|z| \leqslant R$ (şi (cu excepţia transformatelor funcţiilor de forma $ai(t)$, unde $a \in \mathbb{C}$ şi $i(t)$ este funcţia impuls din aplicaţia 4.1.1) există cel puţin un punct singular, în caz contrar $F^*(z)$ ar fi o constantă.

Aplicaţii:

4.1.1. Considerăm funcţia

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t = 0 \end{cases} \qquad (Fig.4.2).$$

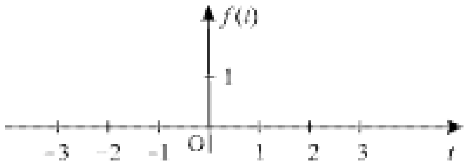


Fig. 4.2

Această funcţie joacă rolul distribuţiei Dirac δ în cazul sistemelor şi semnalelor discrete; de aceea este numită *δ funcţia discretă* sau *funcţia impuls discretă*. Evident

$$\mathcal{Z}[i(t)] = i(0) + i(1)\frac{1}{z} + \cdots + i(t)\frac{1}{z^t} + \cdots = 1.$$

4.1.2. Considerăm *funcţia treaptă unitate discretă*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (Fig.4.3).$$

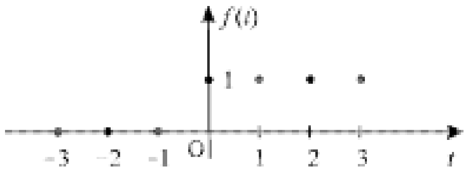


Fig. 4.3.

Deoarece $|u(t)| = 1$, $\forall t \geqslant 0$ rezultă că raza de convergenţă este $R_u = 1$. Aplicând propoziţia 4.1.1 şi seria geometrică, pentru $|z| > 1$ va rezulta transformata $\mathcal{Z}$

$$U^*(z) = \mathcal{Z}[u(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} u(t)z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^t = \frac{z}{z-1}.$$

4.1.3. Funcţia putere $p(t) = u(t)a^t = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < 0 \\ a^t & \text{dacă } t \geqslant 0 \end{cases}$ verifică egalitatea $|p(t)| = |a|^t$, deci raza de convergenţă este $R = |a|$. Atunci, pentru $|z| > |a|$ rezultă $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$ şi putem utiliza din nou seria geometrică

$$P^*(z) = \mathcal{Z}[p(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^t = \frac{z}{z-a}.$$

În particular, pentru $a = e^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, rezultă $R = |a| = |e^{\lambda}| = e^{\operatorname{Re}\lambda}$ deci, pentru $|z| > e^{\operatorname{Re}\lambda}$ se obţine transformata *funcţiei exponenţiale* $\mathcal{Z}[e^{\lambda t}] = \dfrac{z}{z - e^{\lambda}}$.

Teoremele care urmează permit extinderea listei de transformate pentru cele mai importante funcţii original.

Teorema 4.1.1 (liniaritate). *Dacă f şi g sunt funcţii original cu raze R_f respectiv R_g, atunci, pentru $|z| > \max(R_f, R_g)$,*

$$\mathcal{Z}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{Z}[f(t)] + \beta\mathcal{Z}[g(t)], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Dacă $|f(t)| \leqslant M_1 R_f^t$ şi $|g(t)| \leqslant M_2 R_g^t$, fie $R = \max(R_f, R_g)$, obţinem:

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leqslant |\alpha||f(t)| + |\beta||g(t)| \leqslant (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)R^t,$$

deci combinaţia liniară $\alpha f(t)+\beta g(t)$ îndeplineşte condiţia ii) din definiţia 4.1.1 şi este o funcţie original. Pentru $|z| > R$, cele trei serii din formula (4.2) sunt absolut convergente şi avem

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \sum_{t=0}^{\infty}[\alpha f(t) + \beta g(t)]z^{-t} = \alpha \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} + \beta \sum_{t=0}^{\infty} g(t)z^{-t} \\ &= \alpha\mathcal{Z}[f(t)] + \beta\mathcal{Z}[g(t)].\end{aligned}$$

deci operatorul $\mathcal{Z}$ este liniar. ∎

Aplicaţia 4.1.4. Considerăm funcţia $f(t) = \cos(\omega t)$, $\omega > 0$, deci, conform definiţiei 4.1.1, $f(t) = u(t)\cos(\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < 0 \\ \cos(\omega t) & \text{dacă } t \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$.

Utilizând teorema de liniaritate, expresia cosinusului din formulele lui Euler şi transformata exponenţialei din aplicaţia 4.1.3, obţinem, pentru $|z| > 1$:

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega t)] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{Z}[e^{\mathrm{i}\omega t}] + \mathcal{Z}[e^{-\mathrm{i}\omega t}]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{\mathrm{i}\omega}} + \frac{z}{z-e^{-\mathrm{i}\omega}}\right) = \frac{1}{2}\frac{z[2z-(e^{\mathrm{i}\omega}+e^{-\mathrm{i}\omega})]}{z^2-(e^{\mathrm{i}\omega}+e^{-\mathrm{i}\omega})z+e^{\mathrm{i}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega}} =$$
$$= \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}.$$

În mod analog se obţin:

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1};$$
$$\mathcal{Z}[\operatorname{ch}\omega t] = \frac{z(z-\operatorname{ch}\omega)}{z^2-2z\operatorname{ch}\omega+1};$$
$$\mathcal{Z}[\operatorname{sh}\omega t] = \frac{z\operatorname{sh}\omega}{z^2-2z\operatorname{ch}\omega+1};$$
$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t+\varphi)] = \cos\varphi\mathcal{Z}[\sin\omega t]+\sin\varphi\mathcal{Z}[\cos\omega t] = \frac{z(z\sin\varphi+\sin(\omega-\varphi))}{z^2-2z\cos\omega+1}.$$

Teorema 4.1.2 (asemănare). *Dacă R este raza corespunzătoare funcţiei original f şi $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, atunci, pentru $|z| > |a|R$, rezultă*

$$\mathcal{Z}[a^t f(t)] = F^*\left(\frac{z}{a}\right). \tag{4.3}$$

Demonstraţie. $|a^t f(t)| \leqslant |a|^t M R^t = M(|a|R)^t$, deci raza de convergenţă corespunzătoare funcţiei original $a^t f(t)$ este $|a|R$. Pentru $|z| > |a|R$, obţinem

$$\mathcal{Z}[a^t f(t)] = \sum_{t=0}^{\infty}[a^t f(t)]z^{-t} = \sum_{t=o}^{\infty} f(t)\left(\frac{z}{a}\right)^{-t} = F^*\left(\frac{z}{a}\right).$$

■

Aplicaţia 4.1.5. Conform teoremei 4.1.2 şi aplicaţiei 4.1.4, rezultă

$$\mathcal{Z}[a^t\cos\omega t] = \frac{\frac{z}{a}\left(\frac{z}{a}-\cos\omega\right)}{\frac{z^2}{a^2}-2\frac{z}{a}\cos\omega+1} = \frac{z(z-a\cos\omega)}{z^2-2az\cos\omega+a^2}.$$

În particular, pentru $a = e^\lambda$,

$$\mathcal{Z}[e^{\lambda t}\cos\omega t] = \frac{z(z-e^\lambda\cos\omega)}{z^2-2ze^\lambda\cos\omega+e^{2\lambda}}.$$

Teorema 4.1.3 (prima teoremă de întârziere). *Pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{Z}[f(t-n)] = z^{-n}F^*(z). \tag{4.4}$$

Demonstraţie. Conform definiţiei, $\mathcal{Z}[f(t-n)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t-n)z^{-t}$. Restaurăm semnalul $f(t)$ prin schimbarea de indice de însumare $t-n=k$ (deci, $t=k+n$, iar limita de jos $t=0$ se transformă în $k=-n$). Deoarece $f(k)=0$ pentru $k<0$, vom avea

$$\mathcal{Z}[f(t-n)] = \sum_{k=-n}^{\infty} f(k)z^{-(k+n)} = z^{-n}\left(\sum_{k=-n}^{-1} f(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}\right) =$$

$$= z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-n}F^*(z).$$

■

Aplicaţii.

4.1.6. $\mathcal{Z}[u(t-n)] = z^{-n}\mathcal{Z}[u(t)] = z^{-n}\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{z^{n-1}(z-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (Fig. 4.4).

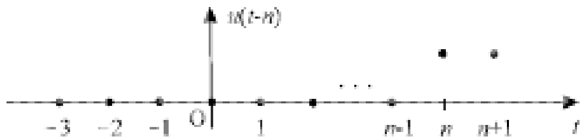


Fig. 4.4

4.1.7. $\mathcal{Z}[u(t-4)e^{t-4}] = z^{-4}\mathcal{Z}[e^t] = z^{-4}\dfrac{z}{z-e} = \dfrac{1}{z^3(z-e)}$.

4.1.8. Conform aplicaţiei 4.1.3, $\mathcal{Z}[(-1)^t] = \dfrac{z}{z+1}$. Atunci găsim $\mathcal{Z}[u(t-1)(-1)^{t-1}] = \dfrac{1}{z+1}$.

Teorema 4.1.4 (deplasare sau a doua teoremă de întârziere). *Pentru* $|z| > R_f$

$$\mathcal{Z}[f(t+n)] = z^n\left(F^*(z) - \sum_{t=0}^{n-1} f(t)z^{-t}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.5}$$

Demonstraţie. Ca în demonstraţia teoremei 4.1.3, se face schimbarea de indice de însumare; avem $t+n=k$ (deci $t=0$ implică $k=n$), apoi se adaugă şi se scade suma care lipseşte din seria $F^*(z)$:

$$\mathcal{Z}[f(t+n)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t+n)z^{-t} = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)z^{-(k-n)} =$$

$$= z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \right) = z^n \left(F^*(z) - \sum_{t=0}^{n-1} f(t) z^{-t} \right)$$

(în ultima sumă am schimbat k cu t) . ■

În particular, pentru $n = 1$ se obţine $\mathcal{Z}[f(t+1)] = z(F^*(z) - f(0))$.

Observaţia 4.1.1. Prin $f(t+n)$ s-a notat funcţia $\tilde{f}(t) = u(t+n)f(t+n)$, deci $\tilde{f} = f(t+n)$ pentru $t = 0, 1, 2, \ldots$ şi $\tilde{f}(t) = 0$ pentru $t = -1, -2, \ldots$. Evident $u(t+n)f(t+n)$ are tot raza de convergenţă R_f.

Aplicaţii:

4.1.9. $\mathcal{Z}[e^{t+3}] = z^3 \left(F^*(z) - e^0 - ez^{-1} - e^2 z^{-2} \right) = \dfrac{z^4}{z-e} - z^3 - ez^2 - e^2 z.$

4.1.10. **Funcţii periodice la dreapta**. Considerăm funcţia f cu proprietatea $f(t+T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}$ (deci $T \in \mathbb{N}^*$ este perioada). Notăm cu $F_T^*(z)$ transformata primei perioade, deci $F_T^*(z) = \sum_{t=0}^{T-1} f(t) z^{-t}$. Folosind periodicitatea funcţiei f şi teorema 4.1.4, obţinem:

$$F^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} f(t+T) z^{-t} = z^T \left(F^*(z) - F_T^*(z) \right),$$

deci

$$F^*(z) = \frac{z^T F_T^*(z)}{z^T - 1}, \quad \text{adică} \quad F^*(z) = \frac{1}{z^T - 1} \sum_{t=0}^{T-1} f(t) z^{T-t}.$$

Se observă că polii transformatei $F^*(z)$ a unei funcţii periodice se află printre rădăcinile $z_j = \exp(\mathrm{i}\frac{2\pi j}{T})$, $j = 0, 1, \ldots T-1$ ale polinomului $z^T - 1$, deci pe cercul unitate. De exemplu, funcţia $f(t) = \begin{cases} 0 & t = 3k \\ 1 & t = 3k+1 \\ 2 & t = 3k+2 \end{cases}$ $(Fig.4.5)$ are perioada $T = 3$ şi transformata $F^*(z) = \dfrac{z^2 + 2z}{z^3 - 1}$.

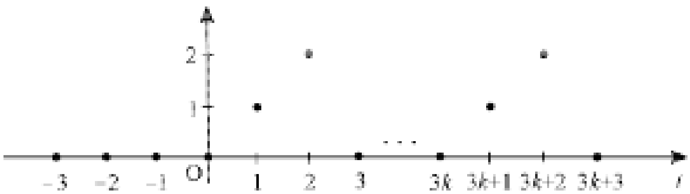


Fig. 4.5

Invers, dacă o funcţie $F^*(z)$ are forma $F^*(z) = \dfrac{a_o z^T + a_1 z^{T-1} + \cdots + a_{T-1} z}{z^T - 1}$, ea este transformata funcţiei f periodice de perioadă T, care are valorile

$f(kT+i) = a_i$, $i = \overline{0, T-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Pentru funcţiile discrete rolul derivatei este preluat de funcţia diferenţă.

Definiţia 4.1.3. *Se numeşte* diferenţa funcţiei f *funcţia* Δf *definită prin* $\Delta f(t) = 0$ *pentru* $t < 0$ *şi* $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ *pentru* $t = 0, 1, \ldots$. Diferenţa de ordinul n, *notată* $\Delta^n f$, *se defineşte prin recurenţă:* $\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t))$. *Se poate arăta uşor că* $\Delta^n f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(t+k)$.

Teorema 4.1.5 (diferenţă). *Pentru* $|z| > R_f$, *are loc egalitatea*

$$\mathcal{Z}[\Delta f(t)] = (z-1)F^*(z) - zf(0). \tag{4.6}$$

Demonstraţie. Folosind liniaritatea şi deplasarea (formula (4.5) cu $n = 1$), rezultă că $\Delta f(t)$ are raza de convergenţă R_f corespunzătoare funcţiei original f şi obţinem

$$\mathcal{Z}[\Delta f(t)] = \mathcal{Z}[f(t+1) - f(t)] = \mathcal{Z}[f(t+1)] - \mathcal{Z}[f(t)] =$$

$$= z\left(F^*(z) - f(0)\right) - F^*(z) = (z-1)F^*(z) - zf(0).$$

Prin inducţie se poate demonstra generalizarea acestei teoreme:

$$\mathcal{Z}[\Delta^n f(t)] = (z-1)^n F^*(z) - z\sum_{k=0}^{n-1} (z-1)^{n-k-1} \Delta^k f(0), \tag{4.7}$$

unde $\Delta^0 f(t) = f(t)$. ∎

Teorema 4.1.6 (derivarea imaginii).

$$\mathcal{Z}[-tf(t)] = z\left(F^*(z)\right)'. \tag{4.8}$$

Demonstraţie. Deoarece $F^*(z)$ este analitică pentru $|z| > R_f$ şi seria Laurent este uniform convergentă pentru $|z| \geqslant R' > R_f$, derivând termen cu termen se obţine:

$$z((F^*(z))' = z\left(\sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}\right)' = z\left(\sum_{t=1}^{\infty} f(t)(-t) z^{-t-1}\right)$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty} (-tf(t)) z^{-t} = \mathcal{Z}[-tf(t)].$$

∎

Aplicaţia 4.1.11.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[t] &= -\mathcal{Z}[-tu(t)] = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2};\\
\mathcal{Z}[t^2] &= -\mathcal{Z}[-t\cdot t] = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3};\\
\mathcal{Z}[t^3] &= -\mathcal{Z}[-t\cdot t^2] = -z\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right)' = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.
\end{aligned}$$

Funcţia inversă diferenţei şi care joacă rolul integralei pentru funcţiile discrete este funcţia sumă.

Definiţia 4.1.4. *Se numeşte* suma funcţiei f *şi se notează* $\mathcal{S}f(t)$ *funcţia*

$$\mathcal{S}f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad t \leqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{t-1} f(k) & \textit{pentru} \quad t = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{4.9}$$

Evident $\Delta\mathcal{S}f(t) = \mathcal{S}f(t+1) - \mathcal{S}f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{t} f(k) - \sum_{k=0}^{t-1} f(k) = f(t)$ şi

$$\mathcal{S}\left(\Delta f(t)\right) = \sum_{k=0}^{t-1} \Delta f(k) = \sum_{k=0}^{t-1} \left(f(k+1) - f(k)\right) = f(t) - f(0),$$

deci $\mathcal{S}\left(\Delta f(t)\right) = f(t)$ dacă $f(0) = 0$.

Teorema 4.1.7 (sumă). *Pentru* $|z| > \max(R_f, 1)$,

$$\mathcal{Z}[\mathcal{S}f(t)] = \frac{F^*(z)}{z-1}. \tag{4.10}$$

Demonstraţie. Notăm $g(t) = \mathcal{S}f(t)$. Am văzut că $\Delta g(t) = f(t)$, în plus $g(0) = \displaystyle\sum_{k\in\emptyset} f(k) = 0$. Conform teoremei 4.1.5, aplicate funcţiei $g(t)$, $F^*(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[\Delta g(t)] = (z-1)G^*(z) - zg(0) = (z-1)G^*(z)$, deci $G^*(z) = \dfrac{F^*(z)}{z-1}$, egalitate echivalentă cu cea din enunţul teoremei. ■

Aplicaţia 4.1.12. Suma funcţiei f care are valorile: $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = -5$, $f(3) = 0$, $f(4) = -1$, $f(t) = 0$ pentru $t \geqslant 5$ are transformata

$$G^*(z) = \frac{2 + 3z^{-1} - 5z^{-2} - z^{-4}}{z-1} = \frac{2z^4 + 3z^3 - 5z^2 - 1}{z^4(z-1)}.$$

Aplicaţia 4.1.13. Funcţia f definită ca suma pătratelor primelor t numere naturale are transformata

$$F^*(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{S}t^2] = \frac{1}{z-1}\mathcal{Z}[t^2] = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^4}.$$

Teorema 4.1.8 **(integrarea imaginii).** *Dacă* $f(0) = 0$,

$$\mathcal{Z}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_z^\infty \frac{F^*(u)}{u} du. \tag{4.11}$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei 4.1.1, seria Laurent care defineşte funcţia analitică $F^*(z)$ este uniform convergentă pe orice mulţime închisă $|z| \geqslant R'$ cu $R' > R$, deci se poate integra termen cu termen. Rezultă (folosind şi $f(0) = 0$)

$$\begin{aligned}\int_z^b \frac{F^*(u)}{u} du &= \int_z^b \frac{1}{u}\left(\sum_{t=0}^\infty f(t)u^{-t}\right) du = \sum_{t=0}^\infty f(t) \int_z^b u^{-t-1} du \\ &= \sum_{t=1}^\infty f(t)\left(-\frac{1}{t}\right) u^{-t}\Big|_z^b = \sum_{t=0}^\infty \frac{f(t)}{t}\left(z^{-t} - b^{-t}\right).\end{aligned}$$

La limită, $b^{-t} \to 0$ pentru $b \to \infty$, $\forall t \geqslant 1$, deci

$$\int_z^\infty \frac{F^*(u)}{u} du = \sum_{t=1}^\infty \frac{f(t)}{t} z^{-t} = \mathcal{Z}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

■

Aplicaţia 4.1.14. Utilizând aplicaţia 4.1.8 şi teorema 4.1.8, pentru funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \leqslant 0 \\ \dfrac{(-1)^{t-1}}{t} & \text{dacă} \quad t = 1, 2 \ldots, \end{cases}$$

se obţine transformata

$$\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{t-1}}{t}\right] = \int_z^\infty \frac{du}{u(u+1)} = \ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\Big|_z^\infty = -\ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Pentru funcţiile original, produsul de convoluţie s-a definit prin

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Aceasta justifică definirea produsului de convoluţie pentru funcţiile (semnalele) discrete cu sumă în loc de integrală.

Definiţia 4.1.5. Produsul de convoluţie *al funcţiilor original f şi g este funcţia $f * g$ definită de*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad t < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^t f(k)g(t-k) & \textit{pentru} \quad t = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{4.12}$$

Se verifică uşor că produsul de convoluţie are următoarele proprietăţi:$f * g = g * f$ (comutativitate), $(f*g)*h = f*(g*h)$ (asociativitate), $(f_1+f_2)*g = f_1 * g + f_2 * g$ (distributivitate faţă de adunare), $f * i = f$ (funcţia impuls i din aplicaţia 4.1.1 este elementul neutru pentru produsul de convoluţie).

Teorema 4.1.9 (produsul de convoluţie). *Pentru* $|z| > \max(R_f, R_g)$,

$$\mathcal{Z}[(f * g)(t)] = F^*(z)G^*(z). \tag{4.13}$$

Demonstraţie. Fie $r = \max(R_f, R_g)$. Atunci, conform definiţiei 4.1.1 se obţine (pentru $R_f \neq R_g$): $|(f * g)(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{t} |f(t)||g(t-k)| \leqslant \sum_{k=0}^{t} M_f R_f^k M_g R_g^{t-k}$ $= M_f M_g \frac{R_f^{t+1} - R_g^{t+1}}{R_f - R_g} < \frac{M_f M_g r}{|R_f - R_g|} r^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, deci R_{f*g} există şi $R_{f*g} \leqslant r$. Pentru $|z| > R_{f*g}$ se obţine:

$$\begin{aligned} F^*(z)G^*(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-t}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}\right) \overset{\ell=t-k}{=} \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{t} f(k) g(t-k)\right) z^{-t} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (f * g)(t) z^{-t} = \mathcal{Z}[(f * g)(t)]. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.1.10 (produsul originalelor). *Dacă* r *verifică* $R_f < r < \dfrac{|z|}{R_g}$ *atunci*

$$\mathcal{Z}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} F^*(\zeta) G^*\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{4.14}$$

Demonstraţie.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} F^*(\zeta) G^*\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \left(\sum_{t=0}^{\infty} f(t) \zeta^{-t}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(t) g(t) z^{-k} \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^{k-t-1} d\zeta. \end{aligned}$$

(am integrat termen cu termen produsul celor două serii uniform convergente). Cum

$$\int_{|\zeta|=r} \zeta^{k-t-1} d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad k-t-1 \neq -1 \quad \text{(adică pentru } k \neq t) \\ 2\pi \mathrm{i} & \text{pentru} \quad k-t-1 = -1 \quad \text{(adică pentru } k = t), \end{cases}$$

2πi se simplifică iar seria dublă din ultimul termen se reduce la $\sum_{t=0}^{\infty} f(t)g(t)z^{-t} = \mathcal{Z}[f(t)g(t)]$.

■

Corolarul 4.1.1. *Dacă funcţia* $\dfrac{F^*(\zeta)}{\zeta}$ *are polii* $a_1, \ldots, a_n$, *atunci*

$$\mathcal{Z}[f(t)g(t)] = \sum_{j=1}^{n} \text{Rez}\left(F^*(\zeta)G^*\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}, a_j\right) \qquad (4.15).$$

Demonstraţie. Deoarece funcţia $G^*\left(\dfrac{z}{\zeta}\right)$ este analitică pentru $\left|\dfrac{z}{\zeta}\right| > R_g$ şi $r < \dfrac{|z|}{R_g}$ rezultă că $G^*\left(\dfrac{z}{\zeta}\right)$ este analitică pe discul $|\zeta| \leqslant r$, deci funcţia $F^*(\zeta)G^*\left(\dfrac{z}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}$ are polii $a_1, \ldots, a_n$ şi (4.15) se obţine din (4.14) aplicând teorema reziduurilor. ■

Aplicaţia 4.1.15 Ţinând seama de aplicaţiile 4.1.3 şi 4.1.11, pentru $1 < r < \dfrac{|z|}{e^{\text{Re}\lambda}}$, obţinem

$$\mathcal{Z}\big[te^{\lambda t}\big] = \frac{1}{2\pi \text{i}} \oint_{|\zeta|=r} \frac{\zeta}{(\zeta-1)^2} \cdot \frac{\frac{z}{\zeta}}{\left(\frac{z}{\zeta} - e^{\lambda}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi \text{i}} \oint_{|\zeta|=r} \frac{z}{(\zeta-1)^2(z-\zeta e^{\lambda})} d\zeta$$
$$= \text{Rez}\left(\frac{z}{(\zeta-1)^2(z-\zeta e^{\lambda})}; 1\right) = z \lim_{\zeta \to 1} \left(\frac{1}{z-\zeta e^{\lambda}}\right)'$$
$$= z \lim_{\zeta \to 1} \frac{e^{\lambda}}{(z-\zeta e^{\lambda})^2} = \frac{ze^{\lambda}}{(z-e^{\lambda})^2}.$$

Acelaşi rezultat se obţine cu teorema 4.1.2 (asemănare):

$$\mathcal{Z}\big[e^{\lambda t}t\big] = \mathcal{Z}\big[(e^{\lambda})^t t\big] = \frac{\frac{z}{e^{\lambda}}}{\left(\frac{z}{e^{\lambda}} - 1\right)^2} = \frac{ze^{\lambda}}{\left(z-e^{\lambda}\right)^2}.$$

Se poate utiliza şi teorema 4.1.6 (derivarea imaginii):

$$\mathcal{Z}\big[te^{\lambda t}\big] = -z\left(\frac{z}{z-e^{\lambda}}\right)' = -z \cdot \frac{z-e^{\lambda}-z}{(z-e^{\lambda})^2} = \frac{ze^{\lambda}}{(z-e^{\lambda})^2}.$$

Teorema 4.1.11 (valoare iniţială).

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F^*(z). \tag{4.16}$$

Demonstraţie. Funcţia $F^*(z) = f(0) + f(1)\frac{1}{z} + f(2)\frac{1}{z^2} + \cdots + f(t)\frac{1}{z^t} + \cdots$ poate fi scrisă sub forma $F^*(z) = f(0) + \frac{G(z)}{z}$, unde $G(z) = f(1) + f(2)\frac{1}{z} + \cdots$. $G(z)$ este analitică pe $|z| > R$ deoarece $F^*(z)$ are această proprietate, deci $\lim_{z\to\infty} G(z)$ există şi este finită şi $\lim_{z\to\infty} \frac{G(z)}{z} = 0$. Atunci,

$$\lim_{z\to\infty} F^*(z) = f(0) + \lim_{z\to\infty} \frac{G(z)}{z} = f(0).$$

■

Observaţia 4.1.2. În acelaşi mod pot fi demonstrate următoarele formule, care împreună cu (4.16) pot fi utilizate pentru determinarea funcţiei original $f(t)$ când se cunoaşte transformata ei $F^*(z)$:

$$\begin{aligned}
&f(1) = \lim_{z\to\infty} z\left(F^*(z) - f(0)\right),\\
&f(2) = \lim_{z\to\infty} z^2\left(F^*(z) - f(0) - f(1)z^{-1}\right),\\
&\cdots\\
&f(t) = \lim_{z\to\infty} z^t\left(F^*(z) - \sum_{k=0}^{t-1} f(k)z^{-k}\right), \quad t = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Teorema 4.1.12 (valoare finală). *Dacă* $\lim_{t\to\infty} f(t)$ *există, atunci*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\substack{z\to 1^+\\ \mathrm{Im} z=0}} (z-1)F^*(z). \tag{4.18}$$

Demonstraţie. Se aplică teorema a doua a lui Abel: dacă seria de puteri $\sum_{t=0}^{\infty} f(t)$ are raza de convergenţă R şi c este un punct de convergenţă al seriei cu $|c| = R$, atunci seria este uniform convergentă pe orice mulţime compactă $K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \cup \{c\}$ care are proprietatea că funcţia $z \to \frac{|c-z|}{|c|-|z|}$este mărginită pe $K \setminus \{c\}$, în particular pe segmentul $K = [0, c]$. Se consideră seria $f(0) + \sum_{t=0}^{\infty} \Delta f(t) = f(0) + \sum_{t=0}^{\infty}(f(t+1) - f(t))$. Suma ei este egală cu limita şirului $(S_t)_{t\in\mathbb{N}}$ al sumelor parţiale

$$\lim_{t\to\infty} [f(0) + (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) + \cdots + (f(t) - f(t-1))] = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Din teorema 5 (a diferenţei) $\mathcal{Z}[\Delta f(t)] = (z-1)F^*(z) - zf(0)$; rezultă

$$(z-1)F^*(z) = zf(0) + \mathcal{Z}[f(t)] = zf(0) + \sum_{t=0}^{\infty}(f(t+1)-f(t))z^{-t}.$$

Conform teoremei lui Abel, deoarece seria din membrul drept este convergentă în $z^{-1} = 1$, ea este uniform convergentă pe $K = [0,1]$ şi suma ei este continuă pe [0,1]. Înlocuind z^{-1} cu z, intervalul [0,1] se transformă în $[1,\infty]$ şi $z^{-1} \to 1^-$, Im$z = 0$ implică $z \to 1^+$. La limită se obţine $\lim\limits_{\substack{z\to 1^+\\ \mathrm{Im} z=0}} (z-1)F^*(z) =$

$\lim\limits_{\substack{z\to 1^+\\ \mathrm{Im} z=0}} (zf(0) + \mathcal{Z}[\Delta f(t)]) = \lim\limits_{\substack{z\to 1^+\\ \mathrm{Im} z=0}} \left(zf(0) + \sum\limits_{t=0}^{\infty}(f(t+1)-f(t))z^{-t}\right) = f(0) +$
$\sum\limits_{t=0}^{\infty}(f(t+1)-f(t)) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t).$

■

Aplicaţia 4.1.16. Pentru transformata $F^*(z) = \dfrac{z}{z-1}$,

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} ((z-1)F^*(z)) = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} z = 1;$$

într-adevăr, $F^*(z)$ este transformata funcţiei unitate $u(t)$ (vezi aplicaţia 4.1.2), pentru care $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 1$.

Aplicaţia 4.1.17. Fie funcţia sumă $g(t) = Sf(t)$ din aplicaţia 4.1.12. Evident, $g(t) = -1$ pentru $t \geqslant 4$, deci $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = -1$. Pe de altă parte,

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} (z-1)G^*(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}} (z-1)\frac{2z^4+3z^3-5z^2-1}{z^4(z-1)} = -1.$$

Deoarece seria $F^*(z) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$ este uniform convergentă pentru $|z| \geqslant R' > R$, teoremele de derivare şi de integrare a seriilor uniform convergente pot fi aplicate şi se obţin următoarele două teoreme.

Teorema 4.1.13 (derivarea imaginii în raport cu un parametru). *Fie funcţia $f : \mathbb{Z}\times[a,b] \to \mathbb{C}$ derivabilă pe $[a,b] \subset \mathbb{R}$ cu derivata $\frac{d}{dx}f(t,x)$ continuă pe $[a,b]$ $\forall t \in \mathbb{Z}^+$. Dacă seria $\sum\limits_{t=0}^{\infty} f(t,x)z^{-t}$ este convergentă cel puţin într-un punct $x \in [a,b]$, iar seria derivatelor $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \frac{d}{dx}f(t,x)z^{-t}$ este uniform convergentă* *pe* $[a,b]$*, atunci seria* $\sum_{t=0}^{\infty} f(t,x)z^{-t}$ *este uniform convergentă pe* $[a,b]$*, suma ei* $F^*(z,x)$ *este derivabilă în raport cu* x *pe* $[a,b]$ *şi*

$$\frac{\partial}{\partial x}F^*(z,x) = \mathcal{Z}\left[\frac{d}{dx}f(t,x)\right] = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{d}{dx}f(t,x)z^{-t}. \tag{4.19}$$

Aplicaţia 4.1.18. Să se determine $\mathcal{Z}[(t+1)]x^t,\ x\in[0,b],\ b<\infty$.
Funcţia $f(t,x) = x^{t+1},\ t\in\mathbb{Z}^+,\ x\in[0,b]$ îndeplineşte condiţiile teoremei 4.1.13 deoarece $|x^{t+1}| \leqslant b\cdot b^t\ \forall t\in\mathbb{Z}^+$. În plus $\mathcal{Z}[x^{t+1}] = x\mathcal{Z}[x^t] = \dfrac{xz}{z-x}$ conform aplicaţiei 4.1.3. Rezultă $\mathcal{Z}[(t+1)x^t] = \mathcal{Z}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{t+1}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xz}{z-x}\right) = \dfrac{z^2}{(z-x)^2}$.

Teorema 4.1.14 (**integrarea imaginii în raport cu un parametru**).

Dacă funcţia $f:\mathbb{Z}\times[a,b]\to\mathbb{C}$ *este integrabilă (Riemann sau Lebesgue) pe* $[a,b]\subset\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{Z}^+$ *iar seria* $\sum_{t=0}^{\infty} f(t,x)z^{-t}$ *este uniform convergentă pe* $[a,b]$*, atunci* $F^*(z,x)$ *este integrabilă pe* $[a,b]$*, seria* $\sum_{t=0}^{\infty}\left(\int_a^x f(t,\xi)d\xi\right)z^{-t}$ *este uniform convergentă pe* $[a,b]$ *şi*

$$\int_a^x F^*(z,\xi) = \mathcal{Z}\left[\int_a^x f(t,\xi)d\xi\right] = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\int_a^x f(t,\xi)d\xi\right)z^{-t},\ \forall x\in(a,b]. \tag{4.20}$$

Aplicaţia 4.1.19. Să se determine $\mathcal{Z}\left[\dfrac{x^{t+1}}{t+1}\right],\ x\in[0,b],\ b<\infty$.

Se consideră funcţia $f(t,x) = x^t$. Seria $\sum_{t=0}^{\infty} f(t,x)z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} x^t z^{-t}$ este uniform convergentă în raport cu x pe $[a,b]$ pentru $|z|>b$, conform criteriului lui Weierstrass, deoarece $|x^t z^{=t}| \leqslant \left(\dfrac{b}{|z|}\right)^t$ şi $\mathcal{Z}[x^t] = \dfrac{z}{z-x}$ pentru $|z|>|x|$ (vezi Aplicaţia 4.1.3). Rezultă $\mathcal{Z}\left[\dfrac{x^{t+1}}{t+1}\right] = \mathcal{Z}\left[\int_0^x \xi^t d\xi\right] = \int_0^x \mathcal{Z}\left[\xi^t\right]d\xi = \int_0^x \dfrac{z}{z-\xi}d\xi = -z\ln(z-\xi)\ |_0^x = z\ln\dfrac{z}{z-x}$.

Teorema 4.1.15 (**suma valorilor funcţiei original**). *Dacă seria* $\sum_{t=0}^{\infty} f(t)$ *este convergentă, atunci*

$$\lim_{\substack{z\to 1^+ \\ \mathrm{Im} z=0}} F^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t). \tag{4.21}$$

Demonstraţie. Din ipoteză $z = 1$ este punct de convergenţă pentru seria $\mathcal{Z}[f(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$. Se aplică teorema a doua a lui Abel (vezi teorema 4.1.12). Rezultă că $F^*(z)$ este continuă pe $[1, \infty]$ şi la limită se obţine (4.21). ■

Aplicaţia 4.1.20. Să se calculeze suma seriei $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t}$ (serie convergentă dar care nu este absolut convergentă). Conform aplicaţiei 4.1.14, $\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{t-1}}{t}\right] = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t} z^{-t} = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$. Din (4.21) rezultă

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t-1}}{t} = \lim_{\substack{z\to 1^+ \\ \mathrm{Im} z=0}} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \ln 2.$$

Aplicaţia 4.1.21. Să se calculeze suma seriei $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{t+1}}{t+1}$.
Utilizăm teorema 4.1.15 şi aplicaţia 4.1.19 şi obţinem:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{t+1}}{t+1} = \lim_{\substack{z\to 1^+ \\ \mathrm{Im} z=0}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^{t+1}}{t+1} z^{-t} = \lim_{\substack{z\to 1^+ \\ \mathrm{Im} z=0}} z \ln \frac{z}{z-x} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

4.2 Transformarea $\mathcal{Z}$ inversă

Teoremele din paragraful precedent au permis calculul unor transformate pentru diferite funcţii original. Considerăm acum problema inversă, determinarea funcţiei original $f(t)$ pentru o funcţie analitică dată $F^*(z)$, care are partea principală a seriei ei Laurent într-o vecinătate a punctului de la infinit constantă.

Se utilizează notaţia $f(t) = \mathcal{Z}^{-1}[F^*(z)]$ iar operatorul $\mathcal{Z}^{-1}$ se numeşte *transformarea $\mathcal{Z}$ inversă*.

Metoda I este dată de

Teorema 4.2.1. *Dacă $F^*(z)$ este o funcţie analitică pe domeniul $|z| > R$ şi $\lim\limits_{z\to\infty} F^*(z)$=const., atunci funcţia ei original există, este unică şi este dată de formula*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\substack{|z|=r \\ r>R}} F^*(z) z^{t-1} dz & \textit{pentru} \quad t = 0, 1, \ldots . \end{cases} \tag{4.22}$$

Demonstraţie. Formula coeficienţilor seriei Laurent $F(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ a unei funcţii F în jurul unui punct singular a este $c_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_\Gamma \dfrac{F(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, unde Γ este o curbă netedă închisă cu proprietatea: a este unicul punct singular al funcţiei F din domeniul mărginit de Γ. Deoarece $F^*(z) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}$, rezultă că $f(t)$ este coeficientul seriei Laurent pentru $n = -t$, $a = 0$, $f(t) = c_{-t}$, deci înlocuind $F(z)$ cu $F^*(z)$ şi Γ cu cercul de rază r centrat în 0 se obţine funcţia $f(t)$ dată de formula (4.22). ■

Fie $a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ punctele singulare ale funcţiei $F^*(z)$; deoarece $F^*(z)$ este analitică pe domeniul $|z| > R$ (Fig. 4.6), ele aparţin discului $|z| \leqslant R$.

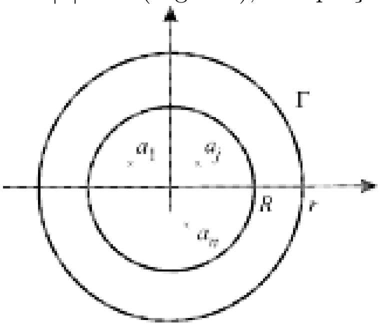


Fig. 4.6

Conform teoremei reziduurilor,

$$\int_{|z|=r} F^*(z) z^{t-1} dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Rez}\left(F^*(z) z^{t-1}, a_j\right).$$

Din (4.22) obţinem formula

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Rez}\left(F^*(z) z^{t-1}, a_j\right), \quad t = 0, 1, \ldots . \tag{4.23}$$

■

Observaţia 4.2.1. Dacă $z = 0$ nu este un zero al funcţiei $F^*(z)$ (în foarte puţine cazuri), atunci pentru $t = 0$ formula (4.23) se modifică astfel:

$$f(0) = \sum_{j=1}^{n} \text{Rez}\left(F^*(z)z^{-1}, a_j\right) + \text{Rez}\left(F^*(z)z^{-1}, 0\right).$$

Este preferabil să se calculeze $f(0)$ cu teorema valorii iniţiale, formula (4.16).

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F^*(z).$$

Aplicaţia 4.2.1. Funcţia $F^*(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ este analitică pe domeniul $|z| > 1$. Originalul ei este, conform formulelor (4.22) şi (4.23),

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|z|=r\\ r>1}} \frac{z}{z^2-1} z^{t-1} dz = \text{Rez}\left(\frac{z^t}{z^2-1}, 1\right) + \text{Rez}\left(\frac{z^t}{z^2-1}, -1\right) \\ &= \left.\frac{z^t}{2z}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^t}{2z}\right|_{z=-1} = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{t-1}\right). \end{aligned}$$

Metoda a II-a. Se bazează pe

Teorema 4.2.2. *Dacă $F^*(z)$ este analitică pe domeniul $|z| > R$, funcţia ei original este dată de formula*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad t < 0 \\ \left.\dfrac{1}{t!}\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^{(t)}\right|_{z=0} & \textit{pentru} \quad t = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{4.24}$$

Demonstraţie. Dacă înlocuim z cu $\dfrac{1}{z}$ în seria Laurent $F^*(z) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$, se obţine seria Taylor $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^t$, deci $f(t)$, $t = 0, 1, \ldots$, sunt coeficienţii seriei Taylor ai funcţiei $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)$ (care este analitică pe discul $|z| < \dfrac{1}{R}$). Dacă funcţia $g(z)$ este analitică pe un disc centrat în a, ea are seria Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad \text{unde} \quad c_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}.$$

Înlocuind $a = 0$, $g(z) = F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $n = t$ şi $f(t) = c_t$, obţinem formula (4.24).

■

Aplicaţia 4.2.2. Fie $F^*(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$. Atunci $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = -\mathrm{Ln}(1-z)$, $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\Big|_{z=0} = 0$, $\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)' = \dfrac{1}{1-z}$, ..., $\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^{(t)} = \dfrac{(t-1)!}{(1-z)^t}$, deci originalul f este dat de $f(t) = 0$ pentru $t \leqslant 0$ şi $f(t) = \dfrac{1}{t!}\dfrac{(t-1)!}{(1-z)^t}\Big|_{z=0} = \dfrac{1}{t}$ pentru $t = 1, 2, \ldots$.

Metoda a III-a. Originalul $f(t)$ se poate determina cu formulele (4.16) şi (4.17) (vezi observaţia 4.1.2).

Metoda a IV-a Calculul prin recurenţă al originalului.

Teorema 4.2.3. *Dacă $F^*(z)$ este o funcţie raţională*

$$F^*(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

atunci originalul $f(t)$ este

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad t < 0 \\ a_n & \textit{pentru} \quad t = 0 \\ a_{n-t} - \displaystyle\sum_{j=0}^{t-1} b_{n-t+j} f(j) & \textit{pentru} \quad t = \overline{1,n} \\ -\displaystyle\sum_{j=t-n}^{t-1} b_{n+j-t} f(j) & \textit{pentru} \quad t \geqslant n+1. \end{cases} \tag{4.25}$$

Demonstraţie. Notăm $f(t) = c_t$ şi obţinem seria Laurent $F^*(z) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} c_t z^{-t}$. Atunci, $P(z) = Q(z)\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} c_t z^{-t}$, adică

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \;=\; & (z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0) \\ & \cdot \left(c_0 + c_1\frac{1}{z} + c_2\frac{1}{z^2} + \cdots + c_t\frac{1}{z^t} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Se obţin două serii Laurent egale, deci coeficienţii aceloraşi puteri ale lui z

sunt egali. Rezultă

$$\begin{aligned}
z^n:&\quad a_n = c_0,\\
z^{n-1}:&\quad a_{n-1} = c_1 + b_{n-1}c_0,\\
\dots&\\
z^{n-t}:&\quad a_{n-t} = c_t + b_{n-1}c_{t-1} + \dots + b_{n-t}c_0 \text{ dacă } 1 < t < n,\\
\dots&\\
z^0:&\quad a_o = c_n + b_{n-1}c_{n-1} + \dots + b_0c_0,\\
\dots&\\
z^{-t}:&\quad 0 = c_{t+n} + b_{n-1}c_{t+n-1} + \dots + b_0c_t, \text{ dacă } t > 0,
\end{aligned}$$

deci şirul c_t se poate calcula prin recurenţă cu formulele:

$$\begin{aligned}
&c_0 = a_n,\\
&c_t = a_{n-t} - \sum_{j=0}^{t-1} b_{n-t+j}c_j, \quad 1 \leqslant t \leqslant n,\\
&c_{t+n} = \sum_{j=t}^{t+n-1} b_{j-t}c_j, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

În ultima egalitate facem o schimbare de indice de însumare înlocuind $t+n$ cu t şi obţinem

$$c_t = -\sum_{j=t-n}^{t-1} b_{n+j-t}c_j, \quad t > n$$

şi (4.25) rezultă înlocuind c_t cu $f(t)$. ■

Metoda a V-a. Dacă funcţia $F^*(z)$ este raţională proprie, atunci ea se descompune în fracţii simple care se dezvoltă în serie Laurent în jurul punctului de la infinit (deci pentru $|z| > R$, R convenabil ales), utilizând seria geometrică. Pentru alte funcţii $F^*(z)$ pot fi utilizate seria exponenţială, seria binomială etc.

Aplicaţia 4.2.3. Funcţia $F^*(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2(z^2-3z+2)}$ analitică pe domeniul $|z| > 2$ are descompunerea în fracţii simple $F^*(z) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^2} - 2\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{z-2}$.

Pentru $|z| > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^t = \sum_{t=0}^{\infty}\dfrac{2^t}{z^{t+1}} = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{t-1}z^{-t}$.

Analog, $\dfrac{1}{z-1} = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} z^{-t}$. Se obţine dezvoltarea în serie Laurent

$$F^*(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{t=3}^{\infty}(5 \cdot 2^{t-3} - 2)z^{-t}$$

deci funcţia original este $f(t) = 0$, $t \leqslant 1$; $f(2) = 1$; $f(t) = 5 \cdot 2^{t-3} - 2$, $t \geqslant 3$.

Aplicaţia 4.2.4. Să se determine originalul funcţiei

$$F^*(z) = \exp\left(\frac{2}{z}\right) + \sqrt{\frac{z}{z+1}},$$

Se utilizează seria exponenţială $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ şi seria binomială

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ t \end{array} \right) z^t, \ |z| < 1$$

unde $\left(\begin{array}{c} \alpha \\ t \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-t+1)}{t!}$, $t = 0, 1 \ldots$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Rezultă, înlocuind z cu $\frac{1}{z}$, $|z| > 1$ şi $\alpha = -\frac{1}{2}$: $F^*(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2^t z^{-t}}{t!} + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ t \end{array} \right) z^{-t}$, deci prin identificare se obţine originalul $f(t) = \frac{2^t}{t!} + (-1)^t \frac{(2t)!}{2^{2t}(t!)^2}$ deoarece $\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ t \end{array} \right) = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-t+1)}{t!} = (-1)^t \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2t-1)}{2^t t!} = (-1)^t \frac{(2t)!}{2^{2t}(t!)^2}$.

Metoda a VI-a. Dacă funcţia analitică F^* admite factorizarea $F^* = G^* H^*$ cu G^* şi H^* funcţii analitice, atunci conform teoremei produsului de convoluţie 4.1.9 originalul ei este $f = g * h$. Se determină $g(t) = \mathcal{Z}^{-1}[G^*(z)]$ şi $h(t) = \mathcal{Z}^{-1}[H^*(z)]$ şi apoi se calculează $f = g * h$.

Aplicaţia 4.2.5.. Să se determine originalul funcţiei $F^*(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$.
Se aplică aplicaţia 4.1.3, $\mathcal{Z}[a^t] = \frac{z}{z-a}$, deci $F^*(z) = \frac{z}{z-a} \cdot \frac{z}{z-b} = \mathcal{Z}[a^t * b^t]$.
Rezultă $f(t) = a^t * b^t = \sum_{k=0}^{t} a^k b^{t-k}$ deci pentru $a \neq b$ originalul este $f(t) = \frac{a^{t+1} - b^{t+1}}{a-b}$ şi pentru $a = b$, $f(t) = a^t * a^t = \sum_{k=0}^{t} a^k a^{t-k} = \sum_{k=0}^{t} a^t = (t+1)a^t$.
Verificare: $\mathcal{Z}[ta^t] + \mathcal{Z}[a^t] = \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$.

4.3 Aplicaţii ale transformării $\mathcal{Z}$

A. Ecuaţii cu diferenţe. Analogul discret al ecuaţiilor diferenţiale este reprezentat de ecuaţiile cu diferenţe. Considerăm ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$a_n\Delta^n y(t) + a_{n-1}\Delta^{n-1}y(t) + \cdots + a_2\Delta^2 y(t) + a_1\Delta y(t) + a_0 y(t) = f(t), \quad (4.26)$$

unde $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, iar membrul drept $f(t)$ şi funcţia necunoscută $y(t)$ sunt funcţii original. Se dau şi condiţii iniţiale:

$$y(0) = y_0, \quad \Delta y(0) = y_1, \quad \ldots, \quad \Delta^{n-1}y(0) = y_{n-1}. \quad (4.27)$$

Conform teoremei diferenţei (teorema 4.1.5),

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\Delta y(t)] &= (z-1)Y^*(z) - zy(0) = (z-1)Y^*(z) - zy_0,\\
\mathcal{Z}[\Delta^2 y(t)] &= (z-1)^2Y^*(z) - z[(z-1)y_0 + \Delta y(0)]\\
&= (z-1)^2Y^*(z) - z[(z-1)y_0 + y_1],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4.28)\\
\mathcal{Z}[\Delta^n y(t)] &= (z-1)^nY^*(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}\Delta^i y(0)\\
&= (z-1)^nY^*(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}y_i.
\end{aligned}$$

Aplicăm ecuaţiei (4.26) transformarea Z şi înlocuim imaginile cu cele date de (4.28). Ecuaţia cu diferenţe (4.26) devine ecuaţia algebrică

$$\begin{aligned}
a_n&\left[(z-1)^nY^*(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}y_i\right] + a_{n-1}\left[(z-1)^{n-1}Y^*(z)\right.\\
&\left.-z\sum_{i=0}^{n-2}(z-1)^{n-i-2}y_i\right] + \cdots + a_2\left[(z-1)^2Y^*(z) - z\left((z-1)y_0 + y_1\right)\right]\\
&+a_1[(z-1)Y^*(z) - zy_0] + a_0Y^*(z) = F^*(z).
\end{aligned}$$

Această ecuaţie se scrie sub forma

$$C(z)Y^*(z) - G(z) = F^*(Z), \quad (4.29)$$

unde am notat cu $C(z)$ polinomul

$$C(z) = a_n(z-1)^n + a_{n-1}(z-1)^{n-1} + \cdots + a_2(z-1)^2 + a_1(z-1) + a_0$$

(care poate fi considerat *polinomul caracteristic al ecuaţiei* (4.26)) şi cu $G(z)$ polinomul $G(z) =$

$$= z\left[a_n\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}y_i + a_{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}(z-1)^{n-i-2}y_i + \cdots + a_2((z-1)y_0 + y_1) + a_1y_0\right].$$

Soluţia ecuaţiei (4.29) este

$$Y^*(z) = \frac{F^*(z) + G(z)}{C(z)},$$

iar originalul acestei soluţii $y(t) = \mathcal{Z}^{-1}[Y^*(z)]$ este soluţia problemei Cauchy (4.26), (4.27).

A doua metodă de rezolvare a problemei Cauchy reprezentate de ecuaţia cu diferenţe (4.26) cu condiţiile iniţiale (4.27) se bazează pe teorema a doua a întârzierii (teorema 4.1.4). Conform definiţiei diferenţelor de ordinul $1, 2, \dots, n$, avem

$$\begin{aligned}
&\Delta y(t) = y(t+1) - y(t),\\
&\Delta^2 y(t) = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t),\\
&\Delta^3 y(t) = y(t+3) - 3y(t+2) + 3y(t+1) - y(t),\\
&\dots\\
&\Delta^n y(t) =\\
&y(t+n) - C_n^1 y(t+n-1) + C_n^2 y(t+n-2) + \dots + (-1)^k C_n^k y(t+k)\\
&\qquad + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} y(t+1) + (-1)^n C_n^n y(t).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Înlocuind aceste diferenţe în ecuaţia (4.26), obţinem ecuaţia

$$b_n y(t+n) + b_{n-1} y(t+n-1) + \dots + b_2 y(t+2) + b_1 y(t+1) + b_0 y(t) = f(t), \tag{4.31}$$

unde

$$\begin{aligned}
&b_n = a_n,\\
&b_{n-1} = a_{n-1} - C_n^1 a_n,\\
&\dots\\
&b_2 = a_2 - C_3^1 a_3 + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} a_n,\\
&b_1 = a_1 - C_2^1 a_2 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n,\\
&b_0 = a_0 - C_1^1 a_1 + \dots + (-1)^n C_n^n a_n.
\end{aligned}$$

Conform teoremei 4.1,4,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Z}[y(t+1)] = z[Y^*(z) - y(0)],\\
&\mathcal{Z}[y(t+2)] = z^2[Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1}],\\
&\dots\\
&\mathcal{Z}[y(t+n)] = z^n[Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1} - \dots - y(n-1)z^{-n+1}].
\end{aligned}$$

Aplicând transformarea $\mathcal{Z}$ ecuaţiei (4.31) ţinând seama de condiţiile iniţiale (4.27) transformăm ecuaţia (4.31) în ecuaţia algebrică

$$\begin{aligned} & b_n z^n \left[Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1} - \cdots - y(n-1)z^{-n+1}\right] \\ & \quad + b_{n-1}z^{n-1}\left[Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1} - \cdots - y(n-2)z^{-n+2}\right] \\ & \quad + \cdots + b_2 z^2[Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1}] + b_1 z[Y^*(z) - y(0)] + b_0 Y^*(z) \\ & = F^*(z). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Notăm cu $C^*(z)$ polinomul caracteristic al ecuaţiei (4.26),

$$C^*(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

şi cu $H(z)$ polinomul $H(z) =$

$$y_0(b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z) + y_1(b_n z^{n-1} + b_{n-1}z^{n-2} + \cdots + b_2 z) +$$
$$+ \cdots + y_{n-2}(b_n z^2 + b_1 z) + y_{n-1} b_n z.$$

Ecuaţia (4.32) devine

$$C^*(z)Y^*(z) - H(z) = F^*(z)$$

cu soluţia

$$Y^*(z) = \frac{F^*(z) + H(z)}{C^*(z)}$$

şi soluţia problemei Cauchy (4.31), (4.27) este

$$y(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{F^*(z) + H(z)}{C^*(z)}\right].$$

Aplicaţia 4.3.1. Să se rezolve problema Cauchy

$$\Delta^2 y(t) - 5\Delta y(t) + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Conform formulelor (4.30), ecuaţia se scrie

$$y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) - 5y(t+1) + 5y(t) + 6y(t) = 0,$$

deci

$$y(t+2) - 7y(t+1) + 12y(t) = 0.$$

Aplicăm transformarea $\mathcal{Z}$ (şi teorema 4.1.4) şi obţinem ecuaţia algebrică

$$z^2\left(Y^*(z) - y(0) - y(1)z^{-1}\right) - 7z\left(Y^*(z) - y(0)\right) + 12Y^*(z) = 0,$$

adică

$$z^2\left(Y^*(z) - 1 - 3z^{-1}\right) - 7z\left(Y^*(z) - 1\right) + 12Y^*(z) = 0,$$

care se scrie

$$Y^*(z)(z^2 - 7z + 12) = z^2 - 4z \text{ sau } Y^*(z)(z-3)(z-4) = z(z-4),$$

care are soluţia $Y^*(z) = \dfrac{z}{z-3}$.

Aplicând seria geometrică, obţinem pentru $|z| > 3$, adică $\left|\dfrac{3}{z}\right| < 1$:

$$Y^*(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{3}{z}} = \sum_{t=0}^{\infty} 3^t z^{-t},$$

deci soluţia problemei Cauchy date este

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t < 0 \\ 3^t & \text{pentru} \quad t = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

B. Sisteme de comandă discrete. Un sistem de comandă Σ are un număr finit de terminale de intrare, un număr finit de terminale de ieşire şi un număr finit de componente primitive. El poate fi reprezentat printr-o *cutie neagră* (Fig. 4.7).

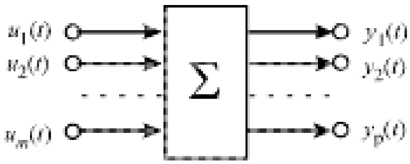


Fig. 4.7

Mulţimea timp este $T = \mathbb{Z}$, deci $t \in \mathbb{Z}$. Mărimile $u_j(t)$, $j = \overline{1,n}$ şi $y_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, numite *variabile de intrare* respectiv *variabile de ieşire*, aparţin unui corp comutativ K. De obicei, K este unul dintre corpurile $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ sau GF(p), unde corpul Galois de caracteristică p, cu $p \in \mathbb{N}$ număr prim, este corpul GF(p)=$\{0,1,\ldots,p\text{-}1\}$ cu adunarea şi înmulţirea modulo p. Sistemul Σ se numeşte *liniar* dacă are componentele primitive liniare; aceste componente sunt:

1° sumatori. Un sumator are m intrări şi o ieşire (Fig. 4.8).

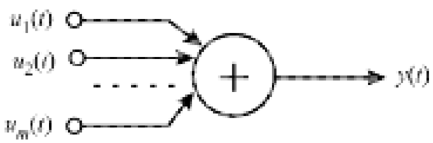


Fig. 4.8

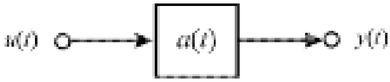


Fig. 4.9

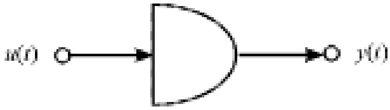


Fig. 4.10

iar variabilele respective verifică relaţia $y(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_m(t)$.

2° amplificatori sau **scalari**. Un amplificator, reprezentat în figura 4.9, are o intrare şi o ieşire şi funcţionează conform relaţiei $y(t) = a(t)u(t)$. Mărimea $a(t) \in$ K se numeşte *factor de amplificare*. Sistemul Σ se numeşte *staţionar* dacă toţi factorii de amplificare sunt constanţi: $a(t) = a \in K, \forall t \in \mathbb{Z}$.

3° **elemente de întârziere**, reprezentate în figura 4.10, tot cu o intrare şi o ieşire. Aplicaţia intrare-ieşire este $y(t+1) = u(t)$. Dacă sistemul Σ are n elemente de întârziere, lui i se asociază *n variabile de stare* $x_i(t)$, unde $x_i(t)$ este valoarea variabilei de ieşire a elementului de întârziere i la momentul t. Notăm cu $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$, $d_{ij}(t)$ factorii de amplificare pe următoarele conexiuni: $a_{ij}(t)$-pe conexiunea dintre elementele de întârziere j respectiv i, $i, j = \overline{1, n}$; $b_{ij}(t)$-între intrarea j şi elementul de întârziere i, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$; $c_{ij}(t)$-între elementul de întârziere j şi ieşirea i, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, p}$; $d_{ij}(t)$-între intrarea j şi ieşirea i, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, p}$. Schema unui sistem liniar Σ este reprezentat în figura 4.11.

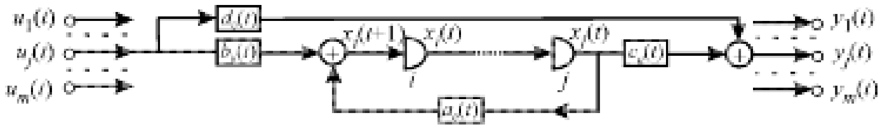


Fig. 4.11

La momentul t, semnalul de la ieşirea sumatorului ce precede elementul de întârziere i este $x_i(t+1)$ (semnalul ce se va afla la ieşirea elementului de întârziere i la momentul $t+1$); el este egal cu suma semnalelor care intră în sumator de la intrările j şi de la elementele de întârziere j; se obţin *ecuaţiile de stare* ale sistemului Σ:

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)u_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.33}$$

În mod analog, analizând semnalele de intrare şi de ieşire de la sumatorul ieşirii i, obţinem *ecuaţiile de ieşire* ale sistemului Σ:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(t)u_j(t),\ i = \overline{1,p}. \tag{4.34}$$

Vom numi vectorii $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T$ *starea, intrarea* (sau *comanda*) respectiv *ieşirea* sistemului Σ la momentul t. Notăm cu $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ matricele $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$, având elementele $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ respectiv $d_{ij}(t)$. Ecuaţiile (4.33) şi (3.34) se pot scrie sub forma

$$\Sigma \begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & (4.35) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). & (4.36) \end{cases}$$

Ecuaţiile (4.35) şi (4.36) formează *reprezentarea de stare* a sistemului discret Σ. Astfel de sisteme discrete apar şi prin discretizarea sistemelor continue, care au ecuaţia de stare $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$. Ele au numeroase aplicaţii în tehnică (analiza şi procesarea semnalelor, teoria codurilor etc.), în economie, ecologie dar şi în discipline umaniste. Considerăm acum sistemele staţionare, adică cele cu toţi factorii de amplificare constanţi, notate în literatură LTI (Linear Time Invariant). În acest caz, matricele A, B, C şi D sunt matrice constante (cu elemente din corpul comutativ K), iar momentul iniţial se consideră $t = 0$. Transformata $\mathcal{Z}$ a unui vector se defineşte în mod natural ca vectorul transformatelor $\mathcal{Z}$ ale componentelor, dacă acestea sunt funcţii original:

$$\mathcal{Z}[x(t)] = (\mathcal{Z}[x_1(t)], \dots, \mathcal{Z}[x_n(t)])^T.$$

Notând

$$X^*(z) = \mathcal{Z}[x(t)], \quad U^*(z) = \mathcal{Z}[u(t)], \quad Y^*(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$$

şi ţinând seama de teorema 4.1.1 (de liniaritate) şi teorema 4.1.4 (a doua teoremă a întârzierii), prin aplicarea transformării $\mathcal{Z}$ la ecuaţiile (4.35) şi (4.36), obţinem

$$\begin{cases} z(X^*(z) - x(0)) = AX^*(z) + BU^*(z), & (4.37) \\ Y^*(z) = CX^*(z) + DU^*(z). & (4.38) \end{cases}$$

Ecuaţia (4.37) se poate scrie $(z\mathbf{I} - A)X^*(z) = BU^*(z) + zx(0)$ şi înmulţind la stânga cu $(z\mathbf{I} - A)^{-1}$ pentru $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$, obţinem

$$X^*(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1}BU^*(z) + z(z\mathbf{I} - A)^{-1}x(0).$$

Înlocuind în (4.38) pe $X^*(z)$ se obţine *aplicaţia intrare-ieşire* a sistemului Σ:

$$Y^*(z) = \left[C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D\right] U^*(z) + zC(z\mathbf{I} - A)^{-1}x(0).$$

Pentru starea iniţială $x(0) = 0$, această relaţie are forma

$$Y^*(z) = T(z)U^*(z), \quad \text{unde} \quad T(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D.$$

Matricea $T(z)$ se numeşte *matricea de transfer* a sistemului (Σ) şi are un rol foarte important în studiul sistemelor liniare staţionare (LTI).

4.4 Probleme

Să se determine imaginile funcţiilor original:

1° $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0, \\ 1 & \text{dacă} \quad t = 0, 1, \dots. \end{cases}$

$\lceil\ \mathcal{Z}(u(t))(z) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} u(t) z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{z^t} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},\ |z| > 1.\rfloor$

2° $f(t) = a^t, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil\ \mathcal{Z}(f(t))(z) = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^t = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a},\ |z| > |a|.\rfloor$

3° $f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil$ R: din 2°, pentru $a = e^{\lambda} \Rightarrow \mathcal{Z}[e^{\lambda t}] = \dfrac{z}{z - e^{\lambda}},\ |z| > e^{\mathrm{Re}\,\lambda}.\rfloor$

4° $f(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-t+1)}{t!} & \text{dacă} \quad t = 0, 1 \dots, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$

$\lceil$ R: $\mathcal{Z}\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix}\right] = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-t+1)}{t!} z^{-t} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ (seria binomială).$\rfloor$

5° $f(t) = \sin \omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$$\lceil\ R:\ \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}}\right] = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.\rfloor$$

6° $f(t) = \cos \omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil$ R: $\mathcal{Z}[\cos \omega t] = \mathcal{Z}\left[\dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right] = \dfrac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.\rfloor$

7° $f(t) = T_t = \cos(t \arccos x), \quad t \in \mathbb{Z}_+$ (polinoamele Cebâşev);
$R\colon \mathcal{Z}[T_t] = \dfrac{z(z-x)}{z^2 - 2xz + 1}.$

$\lceil$Se utilizează problema 6°, cu $\omega = \arccos x$, deci $\cos\omega = \cos(\arccos x) = x.\rfloor$

8° $f(t) = a^n T_t(x), t \in \mathbb{Z}_+$ $\quad R\colon \mathcal{Z}[f(t)] = \frac{z(z-ax)}{z^2-2axz+a^2}.$

9° $f(t) = \operatorname{sh}\omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+; \quad R\colon \mathcal{Z}[\operatorname{sh}\omega t] = \dfrac{z\operatorname{sh}\omega}{z^2 - 2z\operatorname{ch}\omega + 1}.$

10° $f(t) = \operatorname{ch}\omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+; \quad R\colon \mathcal{Z}[\operatorname{ch}\omega t] = \dfrac{z(z - \operatorname{ch}\omega)}{z^2 - 2z\operatorname{ch}\omega + 1}.$

11° $f(t) = \cos^2 t, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil$ $\mathcal{Z}[\cos^2 t] = \mathcal{Z}\left[\dfrac{1 + \cos 2t}{2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{Z}[u(t)] + \mathcal{Z}[\cos 2t]\right)$, apoi se folosesc rezultatele de la 1° şi 6°.$\rfloor$

12° $f(t) = \sin^3 t, \quad t \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil$Se ţine seama de formula $\sin^3 t = \dfrac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t).\rfloor$

13° $f(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad R\colon \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z - e^{-\lambda}};$

14° $f(t) = e^t - 2e^{\frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad R\colon \dfrac{z}{z-e} - \dfrac{2z}{z - \sqrt{e}};$

15° $f(t) = t, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad R\colon \mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z}{(z-1)^2}.$

$\lceil$Se aplică teorema de derivare a imaginii: $\mathcal{Z}[-t\,f(t)] = z\,[F^*(z)]'$, unde $F^*[z] = \mathcal{Z}[f(t)]$. Rezultă $\mathcal{Z}[t] = -\mathcal{Z}[-tu(t)] = -z\left(\dfrac{z}{z-1}\right)' = \dfrac{z}{(z-1)^2}.\rfloor$

16° $f(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad R\colon \mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$

$\lceil$ Ca în problema precedentă, rezultă $\mathcal{Z}[t^2] = -\mathcal{Z}[-t\cdot t] = -z\left(\dfrac{z}{(z-1)^2}\right)'.\rfloor$

17° $f(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \quad R\colon \mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}.$

$\lceil$ Rezultă $\mathcal{Z}[t^3] = -\mathcal{Z}[-t \cdot t^2] = -z\left(\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right)'.\rfloor$

18° $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{t(t-1)}{2!}, t \in \mathbb{Z}_+^*$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \frac{z}{(z-1)^3}$.

19° $f(t) = \begin{pmatrix} t+k \\ m \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}_+^*, k \leqslant t$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z^{k+1}}{(z+1)^{m+1}}$.

20° $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} a^t, t \in \mathbb{Z}_+^*$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \frac{a^m z}{(z-a)^{m+1}}$.

21° $f(t) = ta^{t-1}u(t-1), \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z}{(z-a)^2}$.

⌈Din prima teoremă a întârzierii 4.1.3: $\mathcal{Z}[a^{t-1}] = z^{-1}\,\mathcal{Z}[a^t]$, rezultă $\mathcal{Z}[a^{t-1}] = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{z}{z-a} \Rightarrow \mathcal{Z}[t\,a^{t-1}] = -z\left(\dfrac{1}{z-a}\right)' = \dfrac{z}{(z-a)^2}$.⌋

22° $f(t) = te^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{ze^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^2}$;

23° $f(t) = t^2 e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z(z+e^{-\alpha})e^{-\alpha}}{(z-e^{-\alpha})^3}$;

24° $f(t) = t\sin\omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\dfrac{z(z^2-1)\sin\omega}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$;

25° $f(t) = t\cos\omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\dfrac{z[(z^2+1)\cos\omega - 2z]}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$;

26° $f(t) = (-1)^t t, \quad t \in \mathbb{Z}_+,$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{-z}{(z+1)^2}$.

⌈Avem succesiv: $\mathcal{Z}[(-1)^t] = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t z^{-t} = \dfrac{z}{z+1}$, $\mathcal{Z}[(-1)^t t] =$
$= -z\left(\dfrac{z}{z+1}\right)' = -\dfrac{z}{(z+1)^2}$.⌋

27° $f(t) = (t+2)\mathrm{ch}\,\omega t, \quad t \in \mathbb{Z}_+$.

⌈$\mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[t\,\mathrm{ch}\,\omega t] + 2\mathcal{Z}[\mathrm{ch}\,\omega t] = -z\left(\dfrac{z(z-\mathrm{ch}\omega)}{z^2-2z\mathrm{ch}\,\omega+1}\right)' + 2\dfrac{z(z-\mathrm{ch}\omega)}{z^2-2z\mathrm{ch}\,\omega+1}$.⌋

28° $f(t) = 1^3 + 2^3 + \cdots + t^3, \quad t \in \mathbb{Z}_+$.

⌈Se foloseşte teorema 4.1.7 şi aplicaţia 4.1.11; vezi aplicaţia 4.1.13.

29° $f(t) = \frac{1}{a-b}(a^{t+1} - b^{t+1}), t \in \mathbb{Z}_+$ $\qquad R$: $\mathcal{Z}[f(t)] = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$.

30° Să se determine transformata $\mathcal{Z}[f(t)]$, dacă f este funcţie periodică de perioadă $T,\ T \in \mathbb{N}$.

$$\lceil\ \mathcal{Z}[f(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \cdots + \frac{f(T-1)}{z^{T-1}} + \frac{f(0)}{z^T} + \frac{f(1)}{z^{T+1}}$$
$$+ \cdots + \frac{f(T-1)}{z^{2T+1}} + \cdots + \frac{f(0)}{z^{kT}} + \frac{f(1)}{z^{kT+1}} + \cdots + \frac{f(T-1)}{z^{2kT+T-1}} + \cdots$$
$$= \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \cdots + \frac{f(T-1)}{z^{T-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{z^T} + \frac{1}{z^{2T}} + \cdots + \frac{1}{z^{kT}} + \cdots\right)$$
$$= \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \cdots + \frac{f(T-1)}{z^{T-1}}\right)\frac{z^T}{z^T - 1}$$

(vezi şi aplicaţia 4.1.10).$\rfloor$

31° $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 2k \\ -1, & t = 2k+1, \end{cases}\quad k \in \mathbb{Z}_+,\quad R\colon \begin{cases} f \text{ este periodică cu } T = 2, \\ \mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{z}{z+1}. \end{cases}$

32° $f(t) = \begin{cases} 2, & t = 3k \\ 0, & t = 3k+1 \\ -1, & t = 3k+2, \end{cases}\quad k \in \mathbb{Z}_+,\quad R\colon T = 3,\ \mathcal{Z}[f(t)] = \dfrac{2z^3 - z}{z^3 - 1}.$

Să se determine originalele transformatelor $\mathcal{Z}$ $F^*(z)$, $f(t) = \mathcal{Z}^{-1}[F^*(z)]$:

33° $F^*(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 1}.$

$$\lceil\ f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=r>1} F^*(z)z^{t-1}dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=r>1} \frac{2z^t}{z^2-1}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} 2\pi \mathrm{i}\left[\mathrm{Rez}\left(\frac{2z^t}{z^2-1}; 1\right) + \ \mathrm{Rez}\left(\frac{2z^t}{z^2-1}; -1\right)\right] = 1 - (-1)^t$$
$$= \begin{cases} 0, & t = 2k \\ 2, & t = 2k+1, \end{cases}\quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

34° $F^*(z) = \dfrac{z^2 + 2z}{z^3 - 1},\qquad R\colon f(t) = \begin{cases} 0, & t = 3k \\ 1, & t = 3k+1 \\ 2, & t = 3k+2. \end{cases}\quad k \in \mathbb{Z}_+.$

$\lceil$Se dezvoltă $F^*(z)$ după puterile lui $\dfrac{1}{z}$ utilizând seria geometrică, sau se foloseşte rezultatul de la funcţii periodice, problema 30°.

35° $F^*(z) = \dfrac{z^3 - z^2 + 2z}{z^3 - 1}$, $\quad R$: $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 3k \\ -1, & t = 3k+1 \\ 2, & t = 3k+2, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}_+$;

36° $F^*(z) = \dfrac{z^2}{z^4 - 1}$, $\quad R$: $f(t) = \begin{cases} 0, & t = 4k \\ 0, & t = 4k+1 \\ 1, & t = 4k+2 \\ 0, & t = 3k+3, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}_+$;

37° $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-e)}$; **38°** $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-e)}$;

39° $F^*(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)(z-e^2)}$; **40°** $F^*(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$;

41° $F^*(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$;

42° $F^\star(z) = \frac{1}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$;

43° $F^*(z) = e^{\frac{a}{z}}$, $\quad R$: $f(t) = \dfrac{a^t}{t!}$;

44° $F^*(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$;

$\lceil$ R: $F^*(z) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} \Rightarrow F^*\left(\frac{1}{z}\right) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} f(t)z^t$ serie Laurent $\Rightarrow f(t) = a_t = \dfrac{\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^{(t)}_{z=0}}{t!}$. Deci, $F^*\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\mathrm{Ln}\,(1-z)$; $\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)' = \dfrac{1}{1-z} \Rightarrow$ $\left(F^*\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^{(t)} = \dfrac{(t-1)!}{(1-z)^t} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \dfrac{(t-1)!}{t!} = \dfrac{1}{t}, & t \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

45° $F^*(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{z+1}{z}\right)$, $\quad R$: $f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \dfrac{(-1)^{t-1}}{t}, & t \in \mathbb{N}^*; \end{cases}$

46° $F^*(z) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, $\quad R$: $f(t) = \begin{cases} 0, & t = 2k \\ \dfrac{2}{2k+1}, & t = 2k+1, \ t \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$

Să se rezolve ecuaţiile cu diferenţe:

47° $\Delta^2 y(t) - 4y(t) = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y(1) = 3$, $\quad R$: $y(t) = 3^t$.

⌈ Ecuaţia se scrie $y(t+2)-2y(t+1)+y(t)-4y(t)=0 \Rightarrow$ (a doua teoremă a întârzierii 4.1.4 $\mathcal{Z}[f(t+n)]=z^n\left[Y^*(z)-\sum_{t=0}^{n-1}f(t)z^{-t}\right]) \Rightarrow z^2[Y^*(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]-2z[Y^*(z)-y(0)]-3Y^*(z)=0 \Rightarrow Y^*(z)=\dfrac{z}{z-3}$. ⌋

48° $\Delta^2y(t)+\Delta y(t)-2y(t)=0,\ y(0)=1,\ \ y(1)=2,\quad R\colon y(t)=2^t;$

49° $\Delta^2y(t)-3\Delta y(t)-4y(t)=0,\ y(0)=1,\ \ y(1)=5,\ \ R\colon y(t)=5^t.$

50° $\Delta^2y(t)+\Delta y(t)-2y(t)=5^t,\ y(0)=1,\ \ y(1)=1,\ \ R\colon y(t)=\frac{5^t+52^{t+1}+7(-1)^t}{18}.$

51° $\Delta^3y(t)+3\Delta^2y(t)-2\Delta y(t)=0,\quad y(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \ y(2)=2.$

⌈ R:Ecuaţia se scrie $y(t+3)-y(t+1)=0 \Rightarrow$ (a doua teoremă a întârzierii 4.1.4) $\mathcal{Z}[f(t+n)]=z^n\left[Y^*(z)-\sum_{t=0}^{n-1}f(t)z^{-t}\right]) \Rightarrow z^3[Y^*(z)-y(0)-y(1)z^{-1}-y(2)z^{-2}]-z[Y^*(z)-y(0)]=0 \Rightarrow Y^*(z)=\dfrac{z+2}{z^2-1}$. Atunci $y(t)=\frac{3+(-1)^t}{2}$ dacă $t\geqslant 1$ şi $y(0)=0$. ⌋

52° $\Delta^3y(t)+\Delta y(t)-10y(t)=t,\quad y(0)=0,\ \ y(1)=0,\ \ y(2)=-1.$

⌈ R:Ecuaţia se scrie $y(t+3)-3y(t+2)+4y(t+1)-12y(t)=0 \Rightarrow z^3[Y^*(z)+z^{-2}]-3z^2Y^*(z)+4zY^*(z)-12Y^*(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow Y^*(z)=\dfrac{z^2(z-2)}{(z-3)(z^2+4)(z-1)^2}$. ⌋

53° Să se determine matricea de transfer a sistemului (Σ), Fig. 4.12.

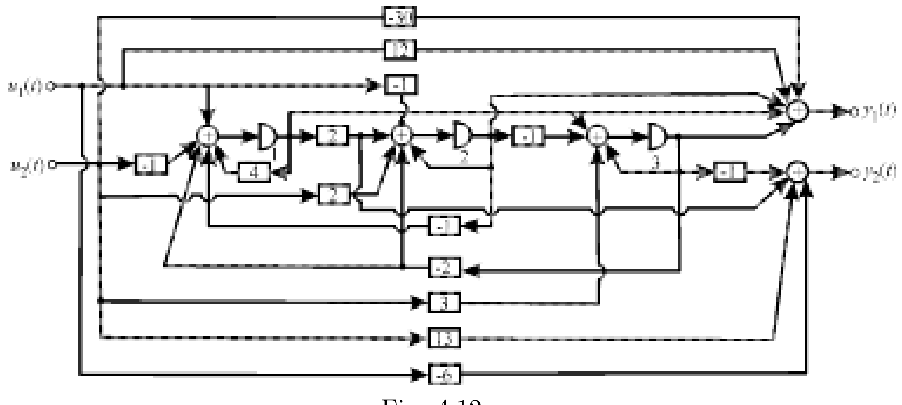


Fig. 4.12

⌈R: Reprezentarea de stare a sistemului este

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t), \end{cases}$$

unde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & -30 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}; \quad \det(s\mathbf{I} - A) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6,$$

$$(s\mathbf{I} - A)^* = \begin{pmatrix} s^2 - 2s - 1 & -s - 3 & -2s + 4 \\ 2s - 4 & s^2 - 5s + 6 & -2s + 4 \\ s - 3 & -s + 3 & s^2 - 5s + 6 \end{pmatrix}.$$

Se obţine matricea de transfer

$$T(s) = C\cdot(s\mathbf{I} - A)^{-1}\cdot B + D = \begin{pmatrix} 8s - 2 & 4s^2 - 42s + 32 \\ 3s^2 - 4s + 4 & -5s^2 + 6s \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}. \rfloor$$

54° Să se determine şirul $(x_n)_n$, dacă $x_n = x_{n-1} + 5^n$, $n \geqslant 1$, $x_0 = 4$.

$\lceil$ Fie $x(n) = x_n$, $n \geqslant 0$ şi 0, pentru $n < 0$. Fie

$$y(n) = x(n) - x(n-1) = \begin{cases} 5^n, & n \geqslant 1 \\ 4, & n = 0 \end{cases}$$

Atunci, pe de o parte, $\mathcal{Z}[y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)] - \mathcal{Z}[x(n-1)] = \mathcal{Z}[x(n)] - z^{-1}\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[x(n)]$, iar pe de altă parte,

$$\mathcal{Z}[y(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} 5^n z^{-n} = 4 + \frac{z}{z-5} - 1 = \frac{4z - 15}{z - 5}.$$

Obţinem astfel $\mathcal{Z}[x(n)] = \frac{z(4z-15)}{(z-1)(z-5)}$, de unde $x(n) = x_n = \frac{11 + 5^{n+1}}{4}$, $n \geqslant 0$.$\rfloor$

55° Să se determine şirul $(x_n)_n$, dacă $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $x_0 = 3$, $x(1) = 2$.

$\lceil$ Analog exerciţiului precedent, pentru

$$y(n) = x(n) - x(n-1) - 2x(n-2) = \begin{cases} 0, & n \geqslant 2 \\ -1, & n = 1 \\ 3, & n = 0 \end{cases}$$

$\rfloor$

56° Să se determine şirul $(x_n)_n$, dacă $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = n$, $n \geqslant 2$, $x_0 = 1$, $x(1) = 2$.

Să se determine soluţiile ecuaţiilor

57° $\varphi(t)+\sum_{k=0}^{t}\varphi(k)e^{t-k}=e^{t}$

⌈ R: Aplicând ecuaţiei transformarea $\mathcal{Z}$, obţinem $\mathcal{Z}[\varphi(t)]+\mathcal{Z}[\varphi(t)*e^{t}]=\mathcal{Z}[e^{t}]\Leftrightarrow\mathcal{Z}[\varphi(t)]+\mathcal{Z}[\varphi(t)]\frac{z}{z-e}=\frac{z}{z-e}$, de unde $\mathcal{Z}[\varphi(t)]=\frac{z}{2z-e}$ şi $\varphi(t)=\frac{e^{t}}{2^{t+1}}$, $t\in\mathbb{Z}_{+}$. ⌋

58° $\varphi(t)+2\sum_{k=0}^{t}\varphi(k)(t-k)=t^{2}$

⌈ R:Analog problemei precedentă, $\mathcal{Z}[\varphi(t)]=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z^{2}+1)}$ şi $\varphi(t)=Rez(\frac{z^{t}(z+1)}{z-1)(z^{2}+1)},1)+Rez(\frac{z^{t}(z+1)}{z-1)(z^{2}+1)},\mathrm{i})+Rez(\frac{z^{t}(z+1)}{z-1)(z^{2}+1)},-\mathrm{i})$, $t\in\mathbb{Z}_{+}$ şi cum 1, $\pm\mathrm{i}$ sunt poli de ordinul 1, obţinem $\varphi(t)=\begin{cases}1, & t=4k\\ 1+\mathrm{i}, & t=4k+1\\ 0, & t=4k+2\\ 1-\mathrm{i}, & t=4k+3\end{cases}$, unde $k\in\mathbb{Z}_{+}$.⌋

Să se rezolve ecuaţiile cu diferenţe:

59° $\Delta^{2}y(t)-y(t)=4\sum_{k=0}^{t}y(k)5^{t-k},\quad y(0)=1,\quad y(1)=3.$

⌈ Ecuaţia se scrie $y(t+2)-2y(t+1)=4y(t)*5^{t}$, $\Rightarrow z^{2}[Y^{*}(z)-1-3z^{-1}]-2z[Y^{*}(z)-1]=4Y^{*}(z)\frac{z}{z-5}\Rightarrow Y^{*}(z)=\dfrac{(z+1)(z-5)}{(z-6)(z-1)}$. Obţinem $y(t)=\frac{8+76^{t-1}}{5},\forall t\geqslant 1$ ⌋

60° $\Delta y(t)-4\sum_{k=0}^{t}y(k)9^{t-k}=0,\quad y(0)=1.$

⌈ Ecuaţia se scrie $y(t+1)-y(t)=4y(t)*9^{t}$, $\Rightarrow z[Y^{*}(z)-1]-Y^{*}(z)=4Y^{*}(z)\frac{z}{z-9}\Rightarrow Y^{*}(z)=\dfrac{z(z-9)}{(z-3)^{2}}$. Obţinem $y(t)=3^{t}(1-2t),\forall t\geqslant 0$ ⌋

61° Fie $x=x(t),t\in\mathbb{Z}_{+}$ şi $y=y(t),t\in\mathbb{Z}_{+}$ astfel încât $y(t)=x(0)+x(1)+...+x(t)$. Determinaţi funcţia de transfer $\frac{Y^{*}(z)}{X^{*}(z)}$.

⌈ Fie $\delta_{k}(t)=\begin{cases}1, & t=k\\ 0, & t\neq k\end{cases}$. Atunci $(x*\delta_{k})(t)=x(t-k)$, de unde rezultă că $y=x*\delta_{n}+x*\delta_{n-1}+...+x*\delta_{1}+x$. Cum $\mathcal{Z}[\delta_{k}]=\frac{1}{z^{k}}$ (conform teoremei 4.1.3) şi folosind rezultatul teoremei 4.1.9, obţinem $Y^{*}(z)=\sum_{k=0}^{n}X^{*}(z)\dfrac{1}{z^{k}}=X^{*}(z)\dfrac{1-\frac{1}{z^{n+1}}}{1-\frac{1}{z}}$, de unde rezultă funcţia de transfer $T(z)=\dfrac{Y^{*}(z)}{X^{*}(z)}=\dfrac{z^{n+1}-1}{z^{n-1}(z-1)}$. ⌋

Capitolul 5

Alte transformări

5.1 Transformarea Mellin

Dacă în formulele directă şi de inversare ale transformării Fourier se aplică schimbările de variabile şi de funcţii

$$p = i\omega,\ x = e^t,\ f(\ln x) \to f(x),\ \widehat{f}\Big(\frac{p}{i}\Big) = F(p)$$

se obţin: definiţia *transformatei Mellin* a unei funcţii original f

$$\mathcal{M}[f(x)] = F(p) = \int\limits_0^\infty f(x)x^{p-1}\mathrm{d}x,\ \alpha < \ \mathrm{Re}\, p < \beta$$

şi formula de inversare

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)x^{-p}\mathrm{d}p.$$

Proprietăţi

1. Liniaritate.

$$\mathcal{M}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathcal{M}[f(x)] + \beta\mathcal{M}[g(x)],\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

2. Asemănare.

$$\mathcal{M}[f(ax)] = \frac{1}{a^p}\mathcal{M}[f(x)],\ a > 0.$$

3. Derivarea originalului.

$$\mathcal{M}[f'(x)] = -(p-1)F(p-1),\ \alpha < \mathrm{Im}\,(p-1) < \beta,$$

$$\mathcal{M}\Big[\Big(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{(n)} f(x)\Big] = (-1)^n p^n F(p).$$

4. Derivarea imaginii.

$$\mathcal{M}[f(x)\ln x] = F'(p).$$

5. Integrarea originalului.

$$\mathcal{M}\Big[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big] = -\frac{F(p+1)}{p}.$$

6. Produsul de convoluţie.

$$\mathcal{M}\Big[\int_0^\infty t^c f(xt)g(t)\mathrm{d}t\Big] = F(p)G(c-p+1),\ c>0.$$

7. Produsul originalelor.

$$\mathcal{M}[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)G(p-s)\mathrm{d}s.$$

Exemple

1. $\mathcal{M}[e^{-ax}] = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}$, $\operatorname{Re} p > 0$.
2. $\mathcal{M}[e^{-a^2x^2}] = \dfrac{1}{2a^p}\Gamma\Big(\dfrac{p+1}{2}\Big)$.
3. $\mathcal{M}\Big[\dfrac{1}{1+x}\Big] = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$.
4. $\mathcal{M}[e^{iax}] = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p}e^{ip\pi/2},\ 0 < \operatorname{Re} p < 1$.
5. $\mathcal{M}[\cos(\omega x)] = \dfrac{\Gamma(p)}{\omega^p}\cos\dfrac{p\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Re} p < 1$.
6. $\mathcal{M}[\sin(\omega x)] = \dfrac{\Gamma(p)}{\omega^p}\sin\dfrac{p\pi}{2}$.
7. $\mathcal{M}[J_\nu(x)] = \dfrac{2^{p-1}\Gamma\Big(\dfrac{\nu+p}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\nu-p}{2}+1\Big)},\ -\nu < \operatorname{Re} p < \nu+2$.

5.2 Transformarea Hankel

Fie $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile lui Dirichlet: *în orice interval finit* $[a, b]$, $0 < a < b$, f *are cel mult un număr finit de puncte de extrem şi de puncte de discontinuitate de speţa întâi.*

Transformarea Hankel de ordinul ν a funcţiei f este funcţia

$$\mathcal{H}_\nu[f(x)] = F_\nu(s) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(sx) \mathrm{d}x, \quad s \in (0, \infty), \; \nu \in \mathbb{R}_+$$

unde J_ν este funcţia Bessel de ordinul $\nu \in (0, \infty)$,

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Operatorul $\mathcal{H}_\nu$ se numeşte *transformarea Hankel de ordinul* ν.
Formula de inversare este

$$f(x) = \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sx) \mathrm{d}s.$$

Proprietăţi

1. Liniaritate.

$$\mathcal{H}_\nu[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{H}_\nu[f(x)] + \beta \mathcal{H}_\nu[g(x)], \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Asemănare

$$\mathcal{H}_\nu[f(ax)] = \frac{1}{a^2} F_\nu\left(\frac{s}{a}\right).$$

3. Derivarea originalului.

$$\mathcal{H}_\nu[f'(x)] = -s\left[\frac{\nu+1}{\nu} F_{\nu-1}(s) - \frac{\nu-1}{2\nu} F_{\nu+1}(s)\right],$$
$$\mathcal{H}_\nu[x^{\nu-1}\big(x^{1-\nu} f(x)\big)'] = -s F_{\nu-1}(s),$$
$$\mathcal{H}_\nu[x^{-\nu-1}\big(x^{1+\nu} f(x)\big)'] = s F_{\nu+1}(s).$$

4. $\mathcal{H}_\nu[e^{-sx} f(x)] = \mathcal{L}[x f(x) J_\nu(sx)]$.

5. Ecuaţia lui Bessel.

$$\mathcal{H}_\nu\left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x)\right] = -s^2 F_\nu(s).$$

6. Relaţia lui Parseval.

$$\int_0^\infty sF_\nu(s)G_\nu(s)\mathrm{d}s = \int_0^\infty xf(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple.

1. $\mathcal{H}_\nu[x^{\nu-1}e^{-px}] = \dfrac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)s^\nu}{\sqrt{\pi}\left(p^2+s^2\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}$

2. $\mathcal{H}_\nu[x^{p-1}] = \dfrac{2^p\Gamma\left(\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2}\right)}{s^{p+1}\Gamma\left(\frac{1}{2^\nu}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2}\right)}.$

Aplicaţie. Propagarea căldurii într-un disc de rază R pentru o rată de intrare constantă q are ca model ecuaţia căldurii în coordonate polare pentru $u(r,z)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

cu condiţia

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r,0) = \begin{cases} -\dfrac{q}{cR^2}, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Aplicând transformarea Hankel $\mathcal{H}_0$ în raport cu r se obţine problema

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(s,z) - s^2U(s,z) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}(s,0) = -\frac{q}{csR}J_1(sR)$$

unde $U(s,z) = \mathcal{H}_0[u(r,z)]$.

Soluţia mărginită a acestei ecuaţii este $U(s,z) = \dfrac{q}{csR}J_1(sR)e^{-sz}$ de unde rezultă temperatura în disc

$$u(r,z) = \frac{q}{sR}\int_0^{+\infty} J_0(sr)J_1(sR)s^{-1}e^{-sz}\mathrm{d}s.$$

5.3 Transformarea Hilbert

Transformata Hilbert a unei funcţii $f \in L_2$ este funcţia $\widehat{f} = \mathcal{H}[f] \in L_2$ definită de

$$\mathcal{H}[f(x)] = \widehat{f}(t) = \frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{t-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Operatorul $\mathcal{H} : L_2 \to L_2$ se numeşte *transformarea Hilbert*. Formula de inversare este

$$f(x) = \mathcal{H}^{-1}[\widehat{f}(t)] = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(t)}{x-t} \mathrm{d}t.$$

Proprietăţi.

1. $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}, \ \ \mathcal{H}^2 = -id, \ \ \mathcal{H}^4 = id.$
2. $\mathcal{F}[\widehat{f}(t)] = i \cdot \operatorname{sgn} \omega \cdot \mathcal{F}[f(x)](\omega).$

Transformări discrete

5.4 Transformarea $\mathcal{Z}$ bilaterală

Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea: $\exists M > 0, \ R_- > R_+ \geqslant 0$ astfel încât $|f(t)| \leqslant M R_-^t$ pentru $t = -1, -2, ...$şi $|f(t)| \leqslant M R_+^t$ pentru $t = 0, 1, 2, ...\cdot$

Transformata $\mathcal{Z}$ bilaterală a funcţiei f este definită de

$$F_{II}^*(z) = \mathcal{Z}_{II}[f(t)] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f(t) z^{-t}, \ \ R_+^f < |z| < R_-^f$$

unde R_-^f şi R_+^f sunt cel mai mare R_-, respectiv cel mai mic R_+ cu proprietatea de mai sus.

Transformata $\mathcal{Z}$ bilaterală se poate descompune în suma a două transformate unilaterale:

$$\begin{aligned} F_{II}^*(z) &= F_+(z) + F_-(z), \\ F_+(z) &= \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}, \ |z| > R_+^f, \\ F_-(z) &= \sum_{t=-\infty}^{-1} f(t) z^{-t}, \ |z| < R_-^f. \end{aligned}$$

Formule de inversare:

$i)$. $\quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} F_{II}(z) z^{t-1} \mathrm{d}z, \ \ t \in \mathbb{Z}, \ R_-^f < r < R_+^f.$

$$ii). \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t!} F_+\left(\dfrac{1}{z}\right)^{(t)}\Big|_{z=0}, & t = 0, 1, 2, ... \\ \dfrac{1}{(-t)!} F_-(z)^{(-t)}\Big|_{z=0}, & t = -1, -2, ..., \end{cases}$$

unde $F^*_{II}(z) = F_+(z) + F_-(z)$, F_+ şi F_- sunt funcţii olomorfe pe domeniile $|z| > R^f_+$, respectiv $|z| < R^f_-$.

Exemplu. Pentru $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, 1, 2, ..., \\ a^t, & t = -1, -2, ... \end{cases}$ $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$, rezultă $R^f_+ = 1$ şi $R^f_- = |a|$.

Atunci, în coroana circulară $1 < |z| < |a|$ se obţin, utilizând seria geometrică:

$$F_+(z) = \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t} = \frac{z}{z-1}, \; F_-(z) = \sum_{t=-\infty}^{-1} a^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} a^{-t} z^t - 1 = \frac{a}{a-z} - 1 = \frac{z}{a-z},$$

deci

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{a-z} = \frac{z(1-a)}{(z-1)(z-a)}.$$

5.5 Transformarea Walsh

Se consideră numerele $q, n \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $N = q^n$ şi mulţimea $\mathcal{N} = \{0, 1, ..., N-1\}$. Pentru $k \in \mathcal{N}$ se notează cu k_i coeficientul lui q^i din scrierea q-adică a lui k: $k = k_{n-1}q^{n-1} + k_{n-2}q^{n-2} + \cdots + k_1 q + k_0$ şi se consideră numerele

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} k_i + k_{i-1} \pmod q & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ k_{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

Se numesc *funcţii Walsh* (în baza q) funcţiile constante pe porţiuni definite de relaţia

$$\operatorname{wal}(k, t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t)^{\alpha_i(k)}$$

unde $r_i(t) = \operatorname{sgn}(\sin q^i \pi t)$ sunt funcţiile lui Rademacher.

Funcţiile Walsh sunt ortogonale pe $[0, 1]$, adică

$$\langle \operatorname{wal}(k, \cdot), \operatorname{wal}(l, \cdot) \rangle = \int_0^1 \operatorname{wal}(k, t) \operatorname{wal}(l, t) \mathrm{d}t = 0, \quad \text{pentru } k \neq l.$$

Transformata Walsh discretă (TWD) a unei funcţii $x : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, $x = (x_k)_{k \in \mathcal{N}}$ este funcţia $X = (X_m)_{m \in \mathcal{N}}$,

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \operatorname{wal}(m, t), \; m \in \mathcal{N}.$$

Transformata Walsh discretă inversă a funcţiei $X = (X_m)_{m\in\mathcal{N}}$ este $x = (x_t)_{t\in\mathcal{N}}$

$$x_t = \sum_{m=0}^{N-1} X_m \mathrm{wal}(m,t),\ t \in \mathcal{N}.$$

Se consideră matricea $W = [w_{ij}]_{0\leqslant i,j\leqslant N-1}$, unde $w_{ij} = \mathrm{wal}(i,j)$ şi vectorii coloană $\widetilde{x} = [x_0, x_1, ..., x_{N-1}]^T, \widetilde{X} = [X_0, X_1, ..., X_{N-1}]^T$. Matricea W este simetrică. Atunci aceste relaţii se pot scrie sub forma

$$\widetilde{X} = \frac{1}{N} W\widetilde{x}, \quad \widetilde{x} = W\widetilde{X}.$$

5.6 Transformarea Haar

Se consideră $N = 2^q$, $q \in \mathbb{N}$. Se numesc *funcţii Haar* funcţiile $\mathrm{har}(k,t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite de relaţia

$$\mathrm{har}(2^q + m, t) = \begin{cases} \sqrt{2^q}, & \dfrac{m}{2^q} \leqslant t < \dfrac{m+\frac{1}{2}}{2^q}, \\ -\sqrt{2^q}, & \dfrac{m+\frac{1}{2}}{2^q} \leqslant t < \dfrac{m+1}{2^q}, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Funcţiile Haar sunt ortogonale pe [0,1].

Transformata Haar discretă (THD) a unei funcţii $x : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, $x = (x_k)_{k\in\mathcal{N}}$ este funcţia

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \mathrm{har}(m,t),\ m \in \mathcal{N}.$$

Transformata Haar discretă inversă a funcţiei $X = (X_m)_{m\in\mathcal{N}}$ este $x = (x_t)_{t\in\mathcal{N}}$

$$x_t = \sum_{m=0}^{N-1} X_m \mathrm{har}(m,t),\ t \in \mathcal{N}.$$

Se consideră matricea $H = [h_{ij}]_{0\leqslant i,j\leqslant N-1}$, unde $h_{ij} = \mathrm{har}(i,j)$ şi vectorii coloană $\widetilde{x} = [x_0, x_1, ..., x_{N-1}]^T, \widetilde{X} = [X_0, X_1, ..., X_{N-1}]^T$. Relaţiile de mai sus se pot scrie sub forma

$$\widetilde{X} = \frac{1}{N} H\widetilde{x}, \qquad \widetilde{x} = H^T\widetilde{X}.$$

5.7 Transformarea Laplace bidimensională hibridă

Funcţia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie original* dacă are proprietăţile următoare:

i) $f(t,k) = 0$ dacă $t < 0$ sau $k < 0$;

ii) $f(\cdot, k)$ este continuă pe porţiuni în $\mathbb{R}$, $\forall (k) \in \mathbb{Z}_+$;

iii) $\exists M_f > 0$, $\sigma_f > 0$, $R_f > 0$ astfel încât $|f(t,k)| \leqslant M_f e^{\sigma_f t} R_f^k$, $\forall (t,k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$.

Pentru orice original f, funcţia

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(t,k)] = F(s,z) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} f(t,k) e^{-st} z^{-k} \mathrm{d}t,\ s, z \in \mathbb{C}.$$

se numeşte *transformata Laplace bidimensională hibridă* (2D) a funcţiei f.

Operatorul $\mathcal{L}_{1,1}$ se numeşte *transformarea Laplace bidimensională hibridă.*

Integrala improprie este absolut convergentă în domeniul

$$D(f) = \left\{ s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, s > \sigma_f \right\} \times \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R_f \right\}$$

şi uniform convergentă în orice domeniu

$$D'(f) = \left\{ s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, s \geqslant \sigma' \right\} \times \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geqslant R' \right\},\ \text{unde } \sigma' > \sigma_f \ \text{ şi } \ R' > R_f.$$

Proprietăţi.

1. Liniaritate. Pentru orice funcţii original f şi g şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_{1,1}[\alpha f(t,k) + \beta g(t,k)] = \alpha \mathcal{L}_{1,1}[f(t,k)] + \beta \mathcal{L}_{1,1}[g(t,k)].$$

2. Asemănare. Dacă $f(t,k) = 0$ pentru $k \neq nl$, $l = 0, 1, ..., n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\forall a > 0$, $s, z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > a\sigma_f$, $|z| > R_f^n$,

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(at, nk)] = \frac{1}{a} F\Big(\frac{s}{a}, z^{1/n}\Big).$$

3. Prima teoremă de întârziere.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}_{1,1}[f(t-a, k-n)] = e^{-sa} z^{-n} F(s,z).$$

4. A doua teoremă de întârziere. $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(t+a, k+n)] = e^{sa} x^n \Bigg[F(s,z) - \int_0^a e^{-st} \mathcal{Z}[f(t,k)] \mathrm{d}t -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}\mathcal{L}[f(t,k)] + \int_0^a \sum_{k=0}^{n-1} f(t,k)e^{-st}z^{-k}\mathrm{d}t\Bigg],$$

unde $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{Z}$ reprezintă transformarea Laplace (1D) şi transformarea $\mathcal{Z}$.

5. Deplasare. Dacă $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$, atunci

$$\mathcal{L}_{1,1}[e^{at}b^k f(t,k)] = F\Big(s-a, \frac{z}{b}\Big),\ \forall s,z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a + \sigma_f,\ |z| > |b|R_f.$$

6. Derivare şi întârziere. Dacă $f^{(n)} = \dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}$ este funcţie original, atunci

$$\mathcal{L}_{1,1}[\dot f(t,k+1)] = szF(s,z) - sz\mathcal{L}[f(t,0)] - z\mathcal{Z}[f(0+,k)] + zf(0+,0),$$

$$\mathcal{L}_{1,1}[\dot f(t,k)] = sF(s,z) - \mathcal{Z}[f(0+,k)],$$

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(t,k+1)] = z\big(F(s,z) - \mathcal{L}[f(t,0)]\big),$$

$$\mathcal{L}_{1,1}[f^{(n)}(t,k)] = s^nF(s,z) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}\mathcal{Z}[f^{(i)}(0+,k)],$$

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(t,k+m)] = z^m\Big(F(s,z) - \sum_{j=0}^{m-1}\mathcal{L}[f(t,j)]z^{-j}\Big),$$

$$\mathcal{L}_{1,1}[f^{(n)}(t,k+m)] = s^nx^mF(s,z) - s^n\sum_{j=0}^{m-1}\mathcal{L}[f(t,j)]z^{m-j} -$$

$$-z^m\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{Z}[f^{(i)}(0+,k)]s^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f^{(i)}(0+,j)s^{n-i-1}z^{m-j},\ m,n \in \mathbb{N}^*.$$

7. Derivare şi diferenţă. *Diferenţa* funcţiei original $f(t,k)$ este funcţia

$$\Delta f(t,k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ f(t,k+1) - f(t,k), & k \geqslant 0. \end{cases}$$

Dacă $\dot f$ este funcţie original, atunci

$$\mathcal{L}_{1,1}[\Delta \dot f(t,k)] = s(z-1)F(s,z) - sz\mathcal{L}[f(t,0)] - (z-1)\mathcal{Z}[f(0+,k)] + zf(0+,0).$$

8. Derivarea imaginii. Pentru orice $q, r \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_{1,1}[(-1)^{q+r}t^qk(k+1)\cdots(k+r-1)f(t,k)] = z^r\frac{\partial^{q+r}F}{\partial s^q\partial z^r}(s,z).$$

9. Sumă şi integrarea originalului. *Suma* funcţiei original $f(t,k)$ este funţia

$$Sf(,k) = \begin{cases} 0, & k \leqslant 0, \\ \sum\limits_{l=0}^{k-1} f(t,l), & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Atunci

$$\mathcal{L}_{1,1}\Big[\int\limits_0^t Sf(\tau,k)\mathrm{d}\tau\Big] = \frac{F(s,z)}{s(z-1)}.$$

10. Integrarea imaginii.

$$\mathcal{L}_{1,1}\Big[\frac{f(t,k)}{tk}\Big] = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{F(\tau,\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\zeta$$

dacă integrala improprie este convergentă.

11. Convoluţie. *Produsul de convoluţie* 2D *continuu-discret* al funcţiilor original $f(t,k)$ şi $g(t,k)$ este operatorul $*_2$ definit de

$$\big(f *_2 g\big)(t,k) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad t<0 \ \text{ sau } \ k<0, \\ \int\limits_0^t \sum\limits_{l=0}^{k} f(\tau,l)f(t-\tau,k-l)\mathrm{d}\tau, & \text{pentru} \quad t \geqslant 0 \ \text{ şi } \ k \geqslant 0. \end{cases}$$

Atunci

$$\mathcal{L}_{1,1}[\big(f *_2 g\big)(t,k) = F(s,z)G(s,z).$$

12. Produsul originalelor. Pentru $\sigma_f < a < \operatorname{Re} s - \sigma_g,\ R_f < r < \dfrac{|z|}{R_g}$.

$$\mathcal{L}_{1,1}[f(t,k)\cdot g(t,k)] = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\bigg(\oint\limits_{|z|=r} F(q,\zeta)G\Big(s-q,\frac{z}{\zeta}\Big)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\bigg)\mathrm{d}q.$$

13. Valoarea iniţială.
Dacă $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t,,0) = f(0+,0)$ există, atunci

$$f(0+,0) = \lim_{s\to\infty}\lim_{z\to\infty} sF(s,z).$$

14. Valoarea finală.

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{k\to\infty} f(t,k) = \lim_{s\to 0}\lim_{z\to 1+} s(z-1)F(s,z)$$

dacă limitele există.

15. Formule de inversare.

$$i)\quad f(t,k) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big(\oint_{|z|=r} F(s,z)z^{k-1}\mathrm{d}z\Big)e^{st}\mathrm{d}s,\ a>\sigma_f,\ r>R_f,$$

$$ii)\quad f(t,k) = \frac{1}{2\pi i k!}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\partial^k F(s,z^{-1}}{\partial z^k}\Big|_{z=0} e^{st}\mathrm{d}s,$$

$$iii)\quad f(t,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Rez}\Big(\frac{\partial^k F(s,z^{-1})}{\partial z^k}e^{st}, s_j\Big),$$

unde $s = s_j,\ j\in\{1,...,n\}$ sunt punctele singulare ale funcţiei $\dfrac{\partial^k F(s,z^{-1})}{\partial z^k}$.

$$iv)\quad f(t,k) = \frac{r^k}{4\pi^2 i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} F(s,re^{i\theta})e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta\Big)e^{st}\mathrm{d}s,\ a>\sigma_f,\ r>R_f.$$

$v)$ Dacă $F(s,z)$ are dezvoltarea în serie Laurent

$$F(s,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}s^{-n}z^{-m},$$

atunci funcţia original are dezvoltarea în serie Taylor

$$f(t,k) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{mn}}{(n-1)!}t^{n-1}\delta(k-m),$$

unde δ este funcţia impuls discretă $\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad k=0, \\ 0, & \text{dacă} \quad k\neq 0. \end{cases}$

Aplicaţii.

1. Ecuaţii diferenţiale şi cu diferenţe

Se consideră ecuaţii de forma

$$a_0\Delta\dot{x}(t,k) + a_1\dot{x}(t,k) + a_2\Delta x(t,k) + a_3 x(t,k) = f(t,k)$$

cu condiţiile la frontieră

$$x(0,0) = x_0;\ x(t,0) = g(t),\ t\in\mathbb{R}_+;\ x(0,k) = h(k),\ k\in\mathbb{Z}_+$$

unde $x(t,k)$, $f(t,k)$, $\Delta\dot{x}(t,k) = \dfrac{\partial x(t,k+1)}{\partial t} - \dfrac{\partial x(t,k)}{\partial t}$ sunt funcţii original, $g(t)$ şi $h(t)$ sunt funcţii original 1D continuă, respectiv discretă şi $g(0) = h(0) = x_0$, $a \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se aplică transformarea Laplace bidimensională hibridă 2D. Cu notaţiile:

$$X(s,z) = \mathcal{L}_{1,1}[x(t,k)],\ G(s) = \mathcal{L}[g(t)],\ H(z) = \mathcal{Z}[h(k)]$$

şi ţinând seama de proprietăţile 1 şi 7 se obţine ecuaţia algebrică

$$a_0\big[s(z-1)X(s,z) - (z-1)H(z) - szG(s) + zx_0\big] + a_1\big[sX(s,z) - H(z)\big] +$$
$$+a_2\big[(z-1)X(s,z) - zG(s)\big] + a_3X(s,z) = F(s,z)$$

cu soluţia

$$H(s,z) = \frac{F(s,z) + \big[a_0(z-1) + a_1\big]H(z) + z\big(a_0s + a_2\big)G(s) - a_0zx_0}{a_0s(z-1) + a_1s + a_2(z-1) + a_3}.$$

În mod analog se rezolvă problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale şi cu diferenţe de forma

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{l_n} a_{nl}\frac{\partial^n\big(\Delta^l x(t,k)\big)}{\partial t^n} = f(t,k),\quad N,\, l_n \in \mathbb{N},\, a_{nl} \in \mathbb{R}.$$

2. Matricele de transfer ale sistemelor liniare 2D continue-discrete

Sistemele 2D continue-discrete de tip Roesser au reprezentarea de stare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^h(t,k) \\ x^v(t,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^h(t,k) \\ x^v(t,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t,k),$$
$$y(t,k) = \big[C_1\ C_2\big]\begin{bmatrix} x^h(t,k) \\ x^v(t,k) \end{bmatrix} + Du(t,k)$$

unde $t \in \mathbb{R}_+,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \dot{x}^h(t,k) = \dfrac{\partial x^h(t,k)}{\partial t}$; $x^h(t,k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ şi $x^v(t,k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ sunt respectiv *starea orizontală* şi *starea verticală*, $u(t,k) \in \mathbb{R}^m$ este *intrarea* (comanda) şi $y(t,k) \in \mathbb{R}^p$ este *ieşirea*; A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2 şi D sunt matrice de dimensiuni corespunzătoare.

Se aplică transformarea Laplace bidimensională hibridă 2D şi cu condiţiile la limită $x(0,k) = x(t,0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ k \in \mathbb{Z}_+$, se obţine aplicaţia intrare-ieşire $Y(s,z) = H(s,z)U(s,z)$ unde $H(s,z)$ este *matricea de transfer*

$$H(s,z) = \big[C_1\ C_2\big]\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & zI_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D.$$

În mod analog, pentru sistemele 2D continue-discrete de tip Fornasini-Marchesini
$\dot{x}(t,k+1) = A_0 x(t,k) + A_1 \dot{x}(t,k) + A_2 x(t,k+1) + B_0 u(t,k) + B_1 \dot{u}(t,k) + B_2 u(t,k+1)$,
$y(t,k) = Cx(t,k) + Du(t,k)$
se obţine matricea de transfer

$$H(s,z) = C\big(szI - A_0 - sA_1 - zA_2\big)^{-1}\big(B_0 + sB_1 + zB_2\big) + D.$$

Capitolul 6

Tabele

6.1 Transformarea Fourier

	$f(x)$	$\widehat{f}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathrm{i}x\omega} \mathrm{d}x$
1.	$\widehat{f}(x)$	$2\pi f(-\omega)$
2.	$\overline{f}(x)$	$\overline{\widehat{f}}(-\omega)$
3.	$af(x) + bg(x)$	$a\widehat{f}(\omega) + b\widehat{g}(\omega)$
4.	$f(x-a)$	$e^{\mathrm{i}a\omega}\widehat{f}(\omega)$
5.	$f(ax),\ a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$
6.	$e^{-\mathrm{i}ax} f(x),\ a > 0$	$\widehat{f}(\omega + a)$
7.	$f(ax)\cos(bx),\ a \neq 0$	$\frac{1}{2\lvert a\rvert}\Big[\widehat{f}\Big(\frac{\omega - b}{a}\Big) + \widehat{f}\Big(\frac{\omega + b}{a}\Big)\Big]$
8.	$f(ax)\sin(bx),\ a \neq 0$	$\frac{1}{2\lvert a\rvert\mathrm{i}}\Big[\widehat{f}\Big(\frac{\omega - b}{a}\Big) - \widehat{f}\Big(\frac{\omega + b}{a}\Big)\Big]$

9.	$x^n f(x),\ n \in \mathbb{N}$	$(\mathrm{i})^n \widehat{f}^{(n)}(\omega)$
10.	$f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N}$	$(\mathrm{i})^n \omega^n \widehat{f}(\omega)$
11.	$(f * g)(x)$	$\widehat{f}\,\widehat{g}$
12.	$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$
13.	$e^{-ax}, a > 0$	$\frac{1}{a + \mathrm{i}\omega}$
14.	$e^{-ax^2},\ a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
15.	$e^{-a\|x\|}\ a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
16.	$A\ u(\frac{\pi}{2} - \|t\|) = \begin{cases} A, & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$	$\frac{2A}{\omega}\sin(\frac{\omega\pi}{2})$
17.	$f(t) = \begin{cases} 1 + t, & t \in [-1, 0] \\ 1 - t, & t \in (0, 1] \\ 0, & t \notin [-1, 1] \end{cases}$	$\frac{2(1 - \cos\omega)}{\omega^2}$

	T	$\widehat{T}$
1.	δ_a	$e^{-\mathrm{i}\omega a}$
2.	δ	1
3.	1	$2\pi\delta$
4.	t^n	$2\pi \mathrm{i}^n \delta^{(n)}$
5.	$u(t)$	$\pi\delta - \mathrm{i}\dfrac{1}{\omega}$
6.	$e^{\mathrm{i}t^2}$	$\sqrt{\pi}e^{-\frac{\mathrm{i}(\omega^2+\pi)}{4}}$
7.	$\delta^{(n)}$	$(\mathrm{i}\omega)^n \cdot 1$
8.	$sgn\ t$	$1{-}2\mathrm{i}\ Vp\dfrac{1}{\omega}$
9.	$Vp\dfrac{1}{t}$	$-\ \pi\mathrm{i}\ sgn\ \omega$
10.	$\dfrac{1}{t-\mathrm{i}0}$	$\mathrm{i}\pi\delta + Vp\dfrac{1}{\omega}$
11.	$\dfrac{1}{t+\mathrm{i}0}$	$-\mathrm{i}\pi\delta + Vp\dfrac{1}{\omega}$
12.	$\lvert t\rvert$	$2Vp\dfrac{1}{\omega}$

6.2 Transformarea Laplace

Nr	f	$F(p)$
1.	$H(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2.	$e^{at},\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{p-a},\ \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$
3.	$\sin(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4.	$e\cos(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
5.	$\mathrm{sh}\,(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6.	$\mathrm{ch}\,(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
7.	$t^{\nu},\ \nu > -1$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ \mathrm{Re}\,p > 0$
8.	$t^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
9.	$t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}},\ \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$
10.	$t\sin(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2},\ \mathrm{Re}\,p > \|Im\,\omega\|$
11.	$t\cos(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2},\ \mathrm{Re}\,p > \|Im\,\omega\|$
12.	$e^{at}\sin(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},\ \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a + \|Im\,\omega\|$
13.	$e^{at}\cos(\omega t),\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2},\ \mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a + \|Im\,\omega\|$

Nr	f	$F(p)$
14.	$J_n(t),\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
15.	$L_n(t) = \dfrac{1}{n!} e^t [e^{-t} t^n]^{(n)},\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{(p-1)^n}{p^{n+1}}$
16.	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$
17.	$\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{p}{\omega},\ \mathrm{Re}\, p > \lvert Im\, \omega \rvert$
18.	$\dfrac{e^{at} - e^{bt}}{t}$	$\ln \dfrac{p-b}{p-a}$
19.	$\dfrac{2}{t}\big(\cos(at) - \cos(bt)\big)$	$\ln \dfrac{p^2+b^2}{p^2+a^2}$
20.	$H(t-a),\ a > 0$	$\dfrac{e^{-ap}}{p}$
21.	$A\big(H(t-a) - H(t-b)\big),\ a > 0 < b$	$A\dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$
22.	$f(t+T) = f(t),\ \forall t \geqslant 0,\ T > 0.$ (f periodică de perioadă T)	$\dfrac{1}{1-e^{-Tp}} \displaystyle\int_0^T f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t$
23.	$\lvert \sin(\omega t) \rvert$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \dfrac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}$

În tabelul de mai sus f este notaţia pentru funcţia Hf, unde H este funcţia treaptă a lui Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 1. \end{cases}.$$

De exemplu, prin e^{at} este desemnată funcţia $H(t)e^{at} = \begin{cases} 1, & t < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & t = 0, \\ e^{at}, & t > 0. \end{cases}$

6.3 Transformarea Z

Nr	f	$F^*(z)$
1.	$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$	1
2.	$\delta(t-n) = \begin{cases} 1, & t = n, \\ 0, & t \neq n. \end{cases}$	z^{-n}
3.	$f(t) = 1,\ t = 0, 1, 2, ...$	$\dfrac{z}{z-1}$
4.	$a^t,\ a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z}{z-a}$
5.	$e^{\lambda t}$	$\dfrac{z}{z-e^{\lambda}}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\dfrac{z \sin \omega}{z^2 - 2x \cos \omega + 1}$
7.	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
8.	$\mathrm{sh}\,(\omega t)$	$\dfrac{z \mathrm{sh}\, \omega}{z^2 - 2z \mathrm{ch}\, \omega + 1}$
9.	$\mathrm{ch}\,(\omega t)$	$\dfrac{z(z - \mathrm{ch}\, \omega)}{z^2 - 2z \mathrm{ch}\, \omega + 1}$
10.	$a^t \sin(\omega t)$	$\dfrac{za \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}$
11.	$a^t \cos(\omega t)$	$\dfrac{z(z - a \cos \omega)}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}$
12.	t	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
13.	t^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
14.	t^3	$\dfrac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$
15.	$\begin{pmatrix} \alpha \\ t \end{pmatrix} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-t+1)}{t!},\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\left(1 + \dfrac{1}{z}\right)^{\alpha}$

Nr	f	$F^*(z)$
16.	ta^t	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
17.	$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{z\big((z^2-1)\sin\omega\big)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$
18.	$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{z\big((z^2+1)\cos\omega-2z\big)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$
19.	$T_n(t)=\cos(t\cos x)$	$\dfrac{z(z-x)}{z^2-2zx+1}$
20.	$\dfrac{1}{t},\ t=1,2,...$	$\ln\dfrac{z}{z-1}$
21.	$\dfrac{(-1)^{t-1}}{t},\ t=1,2,...$	$\ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$
22.	$\dfrac{a^{t-1}}{t},\ a\in\mathbb{C},\ t=1,2,...$	$\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{z}{z-a}$
23.	$\dfrac{\sin(\omega t)}{t},\ t=1,2,...t^3,$	$\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\omega}{z-\cos\omega}$
24.	$\dfrac{a^t}{t!},\ a\in\mathbb{C}^*$	$e^{\frac{a}{z}}$
25.	$\dfrac{t+1}{t!}a^t,\ a\in\mathbb{C}$	$\left(1+\dfrac{a}{z}\right)e^{\frac{a}{z}}$
26.	$\dfrac{(-a)^t}{(2t+1)!}$	$\sqrt{\dfrac{z}{a}}\sin\sqrt{\dfrac{a}{z}}$
27.	$\dfrac{(-a)^t}{(2t)!}$	$\cos\sqrt{\dfrac{a}{z}}$
28.	$\dfrac{a^t}{(2t+1)!}$	$\sqrt{\dfrac{z}{a}}\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{a}{z}}$
29.	$\dfrac{a^t}{(2t)!}$	$\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{a}{z}}$
30.	$f(t)=\begin{cases}0, & t=2k,\\ 2, & t=2k+1,\end{cases}\quad k\in\mathbb{N}$	$\dfrac{2z}{z^2-1}$

Index

Bibliografie

[1] J. Arsac: *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, Paris, 1961

[2] M.Ya. Antimirov, A.A. Kolyshkin, Remi Vaillancourt: *Applied Integral Transforms*, American Mathematical Soc., 2007

[3] Gh. Barbu, A. Barbu, C. Gheldiu: *Probleme de matematici speciale*, Tipografia Universitatii din Pitesti, 1993.

[4] V. Brânzănescu, O. Stănăşilă: *Matematici speciale; teorie, exemple, aplicaţii*, Ed. All, 1998

[5] I. Coltescu, M.A. Din: *Matematici superioare*, Editura Muntenia, Constanta,1994.

[6] A. Corduneanu, A.L. Pletea: *Noţiuni de teoria ecuaţiilor diferenţiale*, Ed. Matrix. Rom., Bucureşti, 1999

[7] A. Corduneanu: *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Ed. "Facla" Timişoara, 1981

[8] B. Davies: *Integral Transforms and Their Applications*, (Third ed.), Springer-Verlag, New York, 2002

[9] V.A. Ditkin, A.P. Prudnikov: *Integralnâe preobrazovania i operaţionnoe iscislenie*, Nauka, 1972

[10] G. Doetsch: *Anleitung zum praktischen gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*, Oldenbourg, München, 1967

[11] L. Goraş: *Semnale, circuite şi sisteme*, Ed. Gh. Asachi, Iaşi 1994

[12] D. Homentcovschi: *Functii complexe cu aplicatii n stiinta si tehnica*, Editura Tehnica, Bucuresti, 1086.

[13] W. Keks: *Complemente de matematici cu aplicatii n tehnica*, Editura Tehnica, Bucuresti, 1981.

[14] L. Livovschi, G. Mihnea: *Matematici speciale. Note de curs*, Tipografia Universitatii Bucuresti, 1982.

[15] G. Marinescu, C. Tudor: *Sur la transformation de Laplace des distributions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **12** (1967), 1323-1327

[16] Adelaida Mateescu: *Semnale, circuite şi sisteme*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

[17] J. Mikusinski: *Operational Calculus*, Pergamon, Paris, 1954

[18] V.Olariu, V. Prepeliţă: *Matematici speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985

[19] V.Olariu, V. Prepeliţă: *Teoria distribuţiilor, funcţii complexe şi aplicaţii*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[20] V.Olariu, V. Prepeliţă, C. Drăguşin, C. Radu: *Transformări integrale continue, discrete şi hibride*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2011

[21] L.Popa, D. Roşu: *Matematici speciale:culegere de probleme* Ed. Dosoftei, Iaşi 2003

[22] L.Popa: *Matematici speciale*, Editura Cermi, Iasi 2004

[23] M. N. Popescu: *Matematici speciale*, Editura Universitatii din Pitesti, 2002

[24] V. Prepeliţă: *2D Continuous - Discrete Laplace Transformation and Applications to 2D Systems*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **49** (2004), pp. 355-376

[25] V. Prepeliţă: *Multiple (n,m)-hybrid Laplace transformation and applications to multidimensional hybrid systems. Part I*, Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics, **72**(2010), pp. 105-120.

[26] V. Rudner, C. Nicolescu :*Probleme de matematici speciale*, Editura Didactica si Pedagogica, 1982.

[27] L. Schwartz: *Théorie des distributions*, Ed. Hermann, paris, 1966

[28] D. Stanomir: *Semnale analogice şi transformările lor*, Ed. Athena, 1995

[29] O. Stănăşilă: *Analiză matematică.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[30] T. Stănăşila: *Analiza complexa si calcul operational*, Editura Universitatii Politehnice din Bucuresti, 1985.

[31] O. Stănăşilă : *Analiza matematică a semnalelor şi undinelor*, Matrix Rom, Bucureşti, 1997

[32] Gh. Şabac: *Matematici speciale Vol I şi II* . Ed Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

[33] G. Tătaru: *Elemente de teoria distribuţiilor cu aplicaţii în mecanică*, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1990

[34] C. Tudor: *Transformarea Laplace a distribuţiilor*, Stud. Cerc. Mat. **19** (1967), 1521-1536

[35] V. S. Vladimirov: *Ecuaţiile fizicii matematice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980

[36] V. S. Vladimirov: *Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981